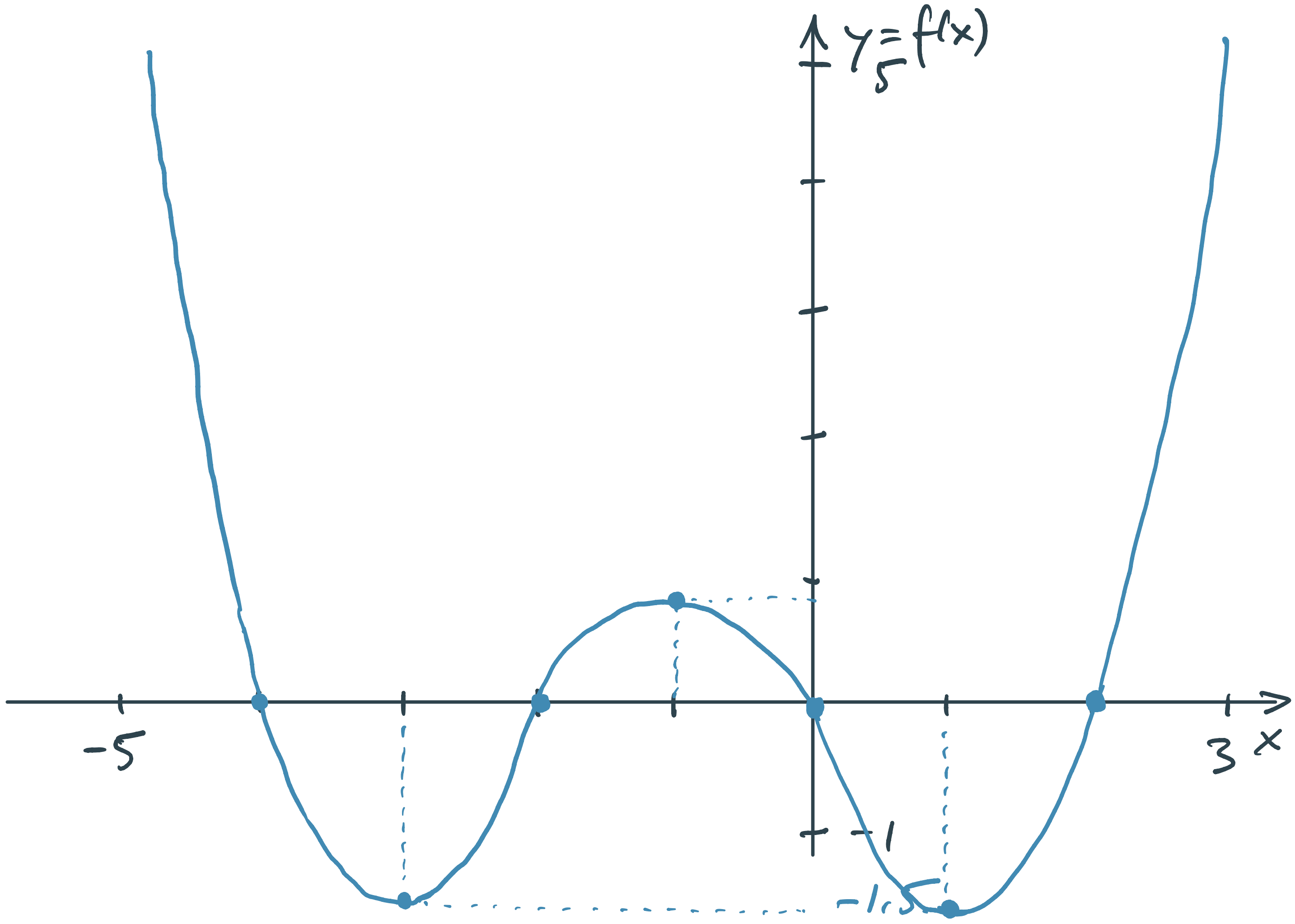
Funktionen und Umkehrfunktionen

Aufgabe 1 Vervollständige für die folgende Funktion die Wertetabelle und zeichne anschliessend den Graphen der Funktion.

$$f(x) = \frac{1}{10} \cdot x \cdot (x+4) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	10,5	0	−1,5	0	0,9	0	−1,5	0	10,5



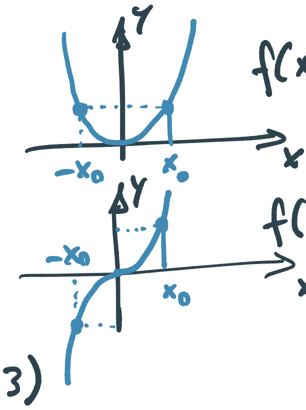
Aufgabe 2 Untersuche die folgenden Funktionen darauf, ob sie *gerade*, *ungerade* oder keines von beiden sind. Stelle sicher, dass die Eigenschaft nicht nur für eine bestimmte Stelle, sondern für alle x erfüllt ist.

a) $f(x) = (x-3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)$

b) $f(x) = \dfrac{x+4}{8}$

c) $f(x) = |x|$

d) $f(x) = x \cdot (x^2-1)$



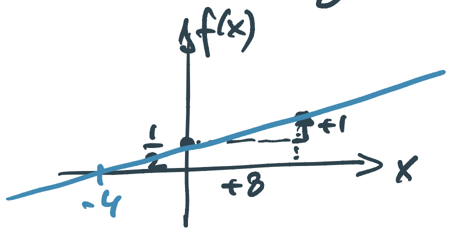
$f(x) = f(-x)$ gerade

$f(x) = -f(-x)$ ungerade

a) $f(-x) = (-x-3)\cdot(-x-1)\cdot(-x+1)\cdot(-x+3)$
$= (-1)\cdot(x+3)\cdot(-1)\cdot(x+1)\cdot(-1)\cdot(x-1)\cdot(-1)\cdot(x-3)$
$= \underbrace{\cancel{(-1)^4}}_{=1}(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$
$= (x-3)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ gerade

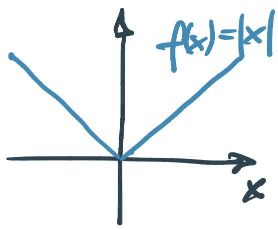
b) $f(-x) = \dfrac{-x+4}{8} = \dfrac{(-1)\cdot(x-4)}{8} = -\underbrace{\dfrac{x-4}{8}}_{\neq f(x)} \Rightarrow$ weder noch



$f(x) = \dfrac{x+4}{8} = \dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{2}$
$= \dfrac{1}{8}\cdot x + \dfrac{1}{2}$ (Lin. Funktion)

c) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}$

z.B. $f(3) = |3| = 3$
$f(-2) = |-2| = 2$



$f(-x) = \begin{cases} -x & \text{wenn } (-x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \\ x & \text{wenn } (-x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \end{cases}$

$f(-x) = \begin{cases} -x & \text{wenn } x \leq 0 \\ x & \text{wenn } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -x & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases} = f(x)$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ gerade

d) $f(-x) = (-x)\cdot((-x)^2-1) = (-x)\cdot(x^2-1)$
$= (-1)\cdot \underbrace{x\cdot(x^2-1)}_{f(x)} = -f(x)$

$f(-x) = -f(x) \quad |\cdot(-1)$
$-f(-x) = f(x) \Rightarrow$ ungerade

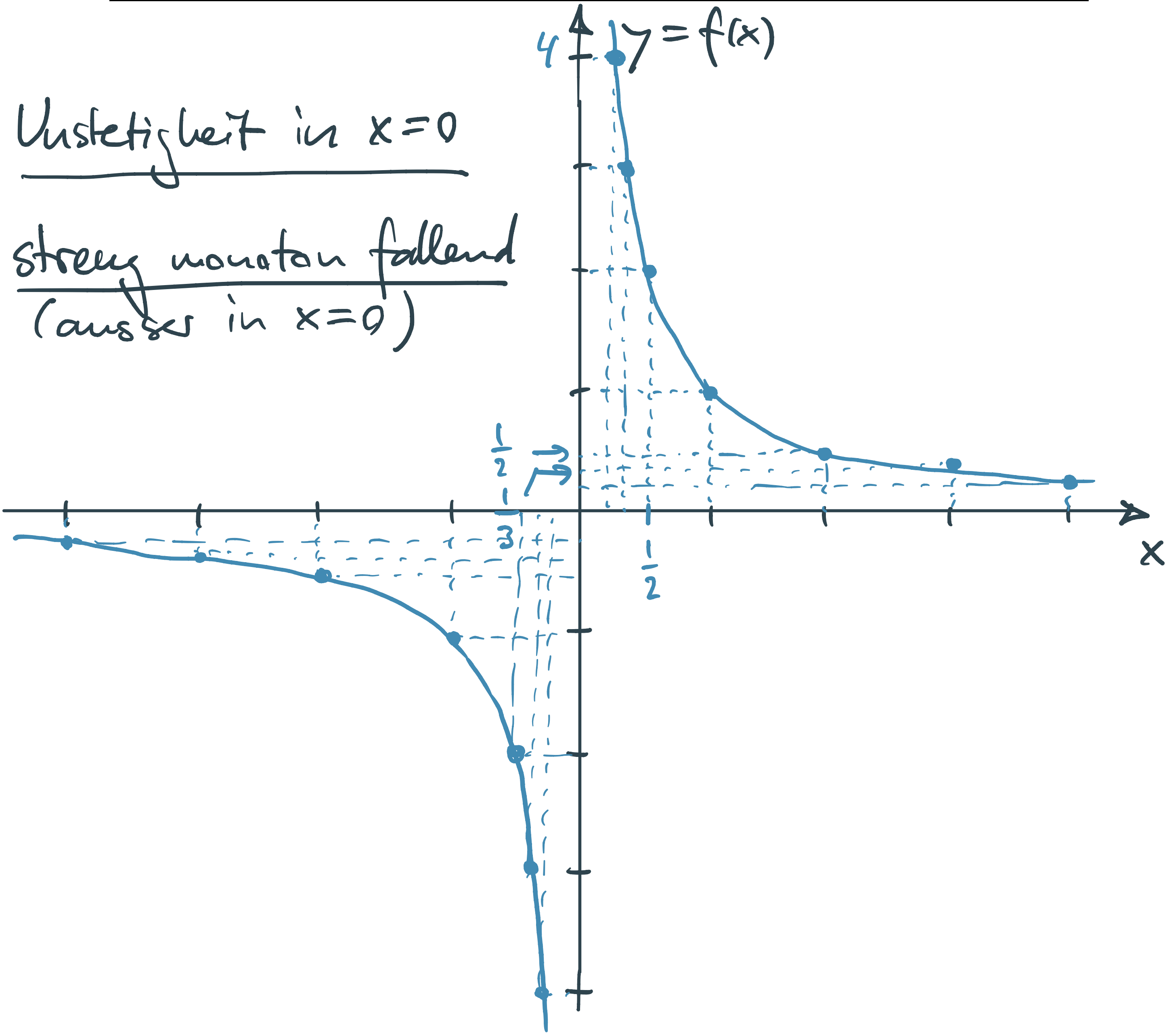
Aufgabe 3 Untersuche die Monotonie und Stetigkeit der folgenden Funktion $f(x)$. Vervollständige die Wertetabelle für das Intervall $[-4, 4]$ und zeichne dann den Graphen der Funktion.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

x	-4	-3	-2	-1	-1/2	-1/4	0	1/4	1/2	1	2	3	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	/	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Unstetigkeit in $x=0$

streng monoton fallend (ausser in $x=0$)



Aufgabe 4 Gegeben ist die Funktion $f(x)$. Finde die Funktionsgleichung der Funktion $g(x)$, die entsprechend verschoben, gestreckt oder gestaucht ist.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ verschoben um 2 nach oben

b) $f(x) = (x-1)(x-2)$ verschoben um 3 nach links

c) $f(x) = x^2 - 2$ von der y-Achse aus, um den Faktor 2 horizontal gestreckt

d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ von der x-Achse aus, um den Faktor 2 vertikal gestaucht

a) $\underline{g(x) = \frac{1}{x} + 2}$

b) $g(x) = (x+3-1)(x+3-2)$

$\underline{g(x) = (x+2)(x+1)}$

Nullstellen: $f(x)$: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

$g(x)$: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$

c) $\underline{g(x)} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 = \underline{\frac{1}{4}x^2 - 2}$

d) $\underline{g(x)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \underline{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$

Aufgabe 5 Bestimme für die folgenden Funktionen $f(x)$ den Parameter a, so dass die Funktion durch den Punkt $P(1,2)$ verläuft.

a) $f(x) = ax - 3$

b) $f(x) = -(x+1)(x+a)$

c) $f(x) = a \cdot \sqrt{x+1}$

d) $f(x) = (ax)^2 - 4$

a) $f(x) = a \cdot x - 3 \qquad P(1,2)$

$f(1) = a \cdot 1 - 3 \overset{!}{=} 2 \quad | +3$

$\underline{a = 5}$

b) $f(1) = -(1+1)(1+a) \overset{!}{=} 2$

$-2(1+a) = 2$

$-2 - 2a = 2 \quad | +2$

$-2a = 4 \quad | :(-2)$

$\underline{a = -2}$

c) $f(1) = a \cdot \sqrt{1+1} = a \cdot \sqrt{2} \overset{!}{=} 2 \quad | :\sqrt{2}$

$a = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\underline{a = \sqrt{2}}$

d) $f(1) = (a \cdot 1)^2 - 4 = 2$

$a^2 - 4 = 2 \quad | +4$

$a^2 = 6$

$\underline{a = \pm\sqrt{6}}$

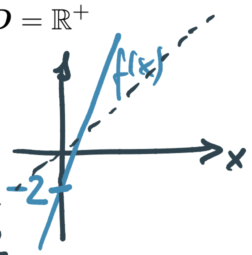
Aufgabe 6 Schreibe für die folgenden Funktionen $f(x)$ den Definitions- und Wertebereich auf. Bestimme dann die jeweilige Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ und ebenfalls ihren Definitions- und Wertebereich.

a) $f(x) = 7x - 2$

b) $f(x) = \sqrt{x-3}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1, \qquad \boldsymbol{D} = \mathbb{R}^+$

a) $f(x) = 7x - 2$



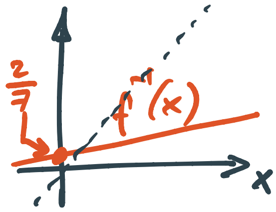
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

$y = 7x - 2 \quad | +2$

$y + 2 = 7x \quad | :7$

$\frac{y+2}{7} = x \quad \rightarrow \quad f^{-1}(y) = \frac{y+2}{7}$

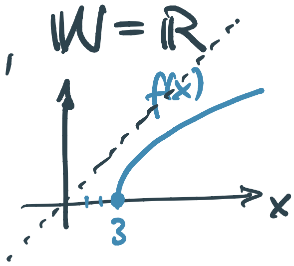
$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{7}$



$\left(f^{-1}(x) = \frac{1}{7}x + \frac{2}{7} \right) \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}, \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{x-3}$ $\qquad \mathbb{D} = [3, \infty[$

$\mathbb{W} = [0, \infty[$

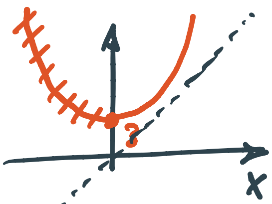


$y = \sqrt{x-3} \quad |$ quadr.

$y^2 = x - 3 \quad | +3$

$y^2 + 3 = x \quad \rightarrow \quad f^{-1}(y) = y^2 + 3$

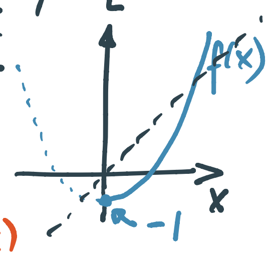
$f^{-1}(x) = x^2 + 3$



$\mathbb{D} = \cancel{\mathbb{R}}$ $[0, \infty[$ $, \quad \mathbb{W} = [3, \infty[$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1, \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$

$\mathbb{W} = [-1, \infty[$

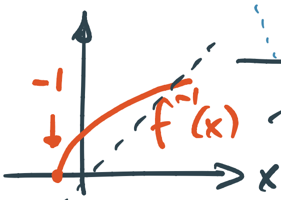


$y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad | +1$

$y + 1 = \frac{1}{2}x^2 \quad | \cdot 2$

$2(y+1) = x^2 \quad | \sqrt{}$

$\pm\sqrt{2(y+1)} = x \quad \rightarrow \quad f^{-1}(x) = \cancel{\pm}\sqrt{2(x+1)}$



$\mathbb{D} = [-1, \infty[\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+ = [0, \infty[$