Lineare Funktionen

Aufgabe 1 Zeichne die Verläufe der folgenden linearen Funktionen in das gleiche Koordinatensystem.

$f(x) = mx + q = ax + b$

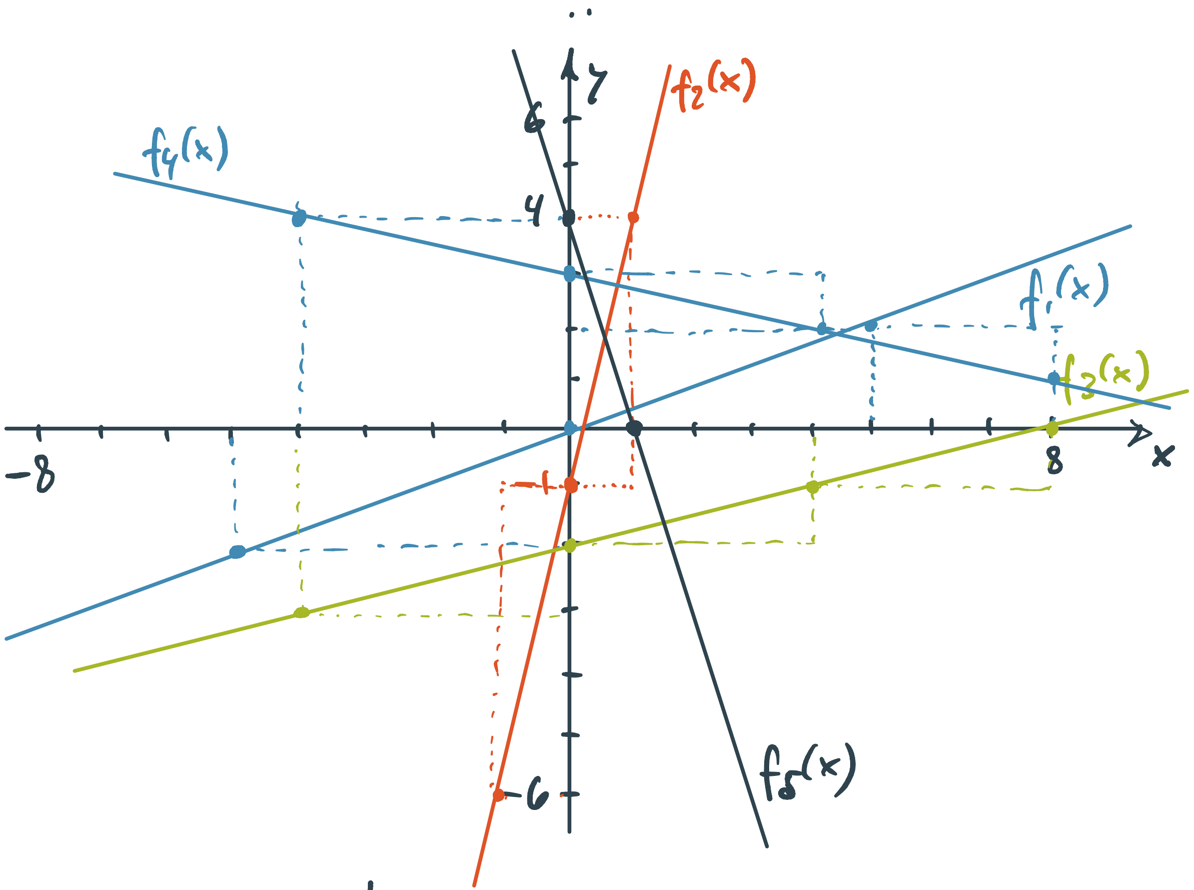
a) $f_1(x) = \frac{2}{5}x$ $\quad m_1 = \frac{2}{5} \quad q_1 = 0$

b) $f_2(x) = 5x - 1$ $\quad m_2 = 5 \quad q_2 = -1$

c) $f_3(x) = \frac{1}{4}x - 2$ $\quad m_3 = \frac{1}{4} \quad q_3 = -2$

d) $f_4(x) = -\frac{1}{4}x + 3$ $\quad m_4 = -\frac{1}{4} \quad q_4 = +3$

e) $f_5(x) = -4x + 4$ $\quad m_5 = -4 \quad q_5 = +4$



$$f_5: \quad -4x + 4 \overset{!}{=} 0 \quad | +4x$$
$$4 = 4x \quad | :4$$
$$1 = x$$

Aufgabe 2 Stelle aufgrund der folgenden Angaben die jeweilige Gleichung der linearen Funktion auf.

a) Die Funktion $f_1(x)$ hat eine Steigung von 2 und geht durch den Ursprung.

b) Die Funktion $f_2(x)$ hat einen Achsabschnitt bei 3 und eine Nullstelle bei ebenfalls 3.

c) Die Funktion $f_3(x)$ geht durch die Punkte $A(-4,-2)$ und $B(4,0)$.

d) Die Funktion $f_4(x)$ hat keine Steigung und enthält den Punkt $C(5,3)$

e) Die Funktion $f_5(x)$ ist parallel zu $f_1(x)$ und hat eine Nullstelle bei -1.

a) $f_1(x) = 2x + q = 2x \qquad \underline{f_1(x) = 2x}$

$f_1(0) = 0 \rightarrow q = 0$

b) $f_2(x) = m_2 \cdot x + 3$

$f_2(3) = 0 \qquad f_2(3) = m_2 \cdot 3 + 3 = 0 \quad |-3$

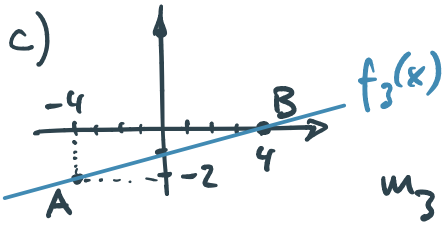
$3 \cdot m_2 = -3 \quad |:3$

$m_2 = -1$

$\rightarrow f_2(x) = (-1) \cdot x + 3$

$= \underline{-x + 3}$

c)

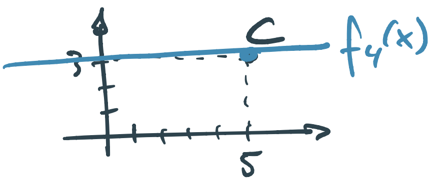


$m_3 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$q = -1$

$\rightarrow \underline{f_3(x) = \frac{1}{4}x - 1}$

d)



$q = 3$

$m_4 = 0$

$\Rightarrow f_4(x) = \cancel{0x} + 3 = 3$

$\underline{f_4(x) = 3}$

e) $m_1 = 2 \Rightarrow m_5 = 2$

$f_5(-1) = 0$

$f_5(-1) = \underset{m}{2} \cdot \underset{x}{(-1)} + q = 0$

$-2 + q = 0 \quad |+2$

$\underline{q = 2}$

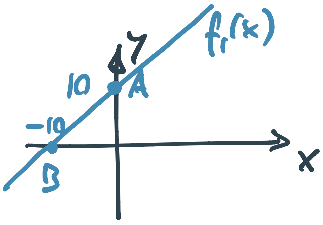
$\rightarrow \underline{f_5(x) = 2x + 2}$

Aufgabe 3 Stelle aufgrund der folgenden Angaben die jeweilige Gleichung der linearen Funktion auf.

a) $f_1(0) = 10$ und $f_1(-10) = 0$

b) $f_2(1) = 2$ und $f_2(4) = 1$

c) $f_3(0) = -\frac{5}{8}$ und $f_3(3) = -0.25$



a) $f_1(0) = 10$ $\quad A(0,10)$

$f_1(-10) = 0$ $\quad B(-10,0)$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= 0-(-10) = 10 \\ \Delta y &= 10 - 0 = 10 \end{aligned}\right\} \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\underline{f_1(x) = x + 10}$$

$m=1$

b)
$$f_2(1) = 2 \rightarrow A(1,2) \qquad \left.\begin{aligned} \Delta x &= 1-4 = -3 \\ \Delta y &= 2-1 = 1 \end{aligned}\right\} \quad m = \frac{1}{(-3)} = -\frac{1}{3}$$
$$f_2(4) = 1 \rightarrow B(4,1)$$

$$f_2(\cancel{x}) = -\frac{1}{3}\cancel{x}\cdot 1 + q = 2 \rightarrow -\frac{1}{3} + q = 2 \quad \Big| + \frac{1}{3}$$
$$q = \frac{7}{3}$$

$x=1$

$$\rightarrow \underline{f_2(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}}$$

Kontrolle:
$$f_2(1) = -\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2 \checkmark \quad A(1,2)$$
$$f_2(4) = -\frac{1}{3}\cdot 4 + \frac{7}{3} = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} = \frac{3}{3} = 1 \checkmark \quad B(4,1)$$

c)
$$f_3(0) = -\frac{5}{8} \rightarrow A\left(0, -\frac{5}{8}\right) \rightarrow \underline{q = -\frac{5}{8}}$$
$$f_3(3) = -\frac{1}{4} \rightarrow B\left(3, -\frac{1}{4}\right)$$

$$\Delta x = 0 - 3 = -3$$
$$\Delta y = -\frac{5}{8} - \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{8} + \frac{2}{8} = -\frac{3}{8}$$
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3/8}{-3} = \underline{\frac{1}{8}} \rightarrow \underline{f_3(x) = \frac{1}{8}\cdot x - \frac{5}{8}}$$

Aufgabe 4 Gegeben ist die folgende lineare Funktion:

$$f(x) = \frac{x-10}{5}$$

a) Wie lautet die Funktionsgleichung von $g(x)$, die parallel zu $f(x)$ verläuft und durch den Punkt $P(5,4)$ geht?

b) Finde die Gleichung der Funktion $h(x)$, die senkrecht auf $f(x)$ steht und durch den Punkt $Q(-2,8)$ geht.

$$f(x) = \frac{x-10}{5} = \frac{x}{5} - \frac{10}{5} = \frac{1}{5}x - 2$$

a) $g(x) \parallel f(x)$

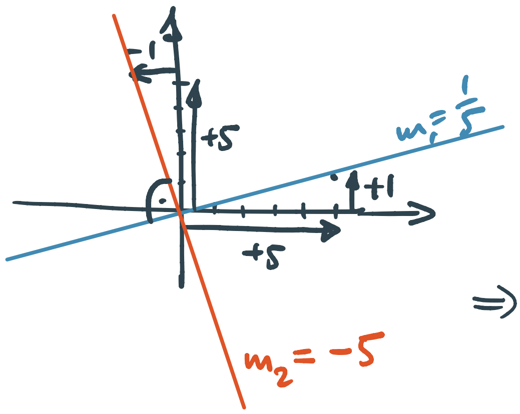
$g(x) = \frac{1}{5}x + q \qquad g(5) = \frac{1}{5} \cdot 5 + q = 4$

$1 + q = 4 \quad | -1$

$q = 3$

$\hookrightarrow \underline{g(x) = \frac{1}{5}x + 3}$

b)



$h(x) = -5x + q$

$h(-2) = -5 \cdot (-2) + q = 8$

$10 + q = 8 \quad | -10$

$q = -2$

$\Rightarrow \underline{h(x) = -5x - 2}$

Aufgabe 5 Im Jahre 1724 schlug der Physiker *Daniel Gabriel Fahrenheit* (1686–1736) eine Temperaturskala vor, die heute noch in den USA angewendet wird. Sie hat folgende Punkte: 32 °F für die Schmelztemperatur von Eis und 212 °F für die Siedetemperatur von Wasser.

a) Stelle die lineare Funktionsgleichung auf, die aus einer Fahrenheit-Temperatur x, die Celsius-Temperatur y berechnet:

$$y = f(x)$$

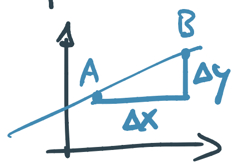
b) Bestimme die Umkehrfunktion f^{-1} und rechne mit ihr die Temperatur 21 °C in Fahrenheit um.

a) $f: x \mapsto y = f(x)$

x: Fahrenheit °F; y: Celsius °C

$f(32) = 0$

$f(212) = 100$



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= 212 - 32 = 180\\ \Delta y &= 100 - 0 = 100\end{aligned}\right\} \quad m = \frac{100}{180} = \frac{1}{1.8}$$

$$f(32) = \frac{1}{1.8}\cdot 32 + q = 0$$

$$\frac{32}{1.8} + q = 0 \quad \Big| -\frac{32}{1.8}$$

$$q = -\frac{32}{1.8}$$

$$\Rightarrow \underline{f(x) = \frac{1}{1.8}x - \frac{32}{1.8}}$$

$$f(32) = \frac{1}{1.8}\cdot 32 - \frac{32}{1.8} = 0 \checkmark$$

$$f(212) = \frac{1}{1.8}\cdot 212 - \frac{32}{1.8} = \frac{212-32}{1.8} = \frac{180}{1.8} = 100 \checkmark$$

b)

$$y = \frac{1}{1.8}x - \frac{32}{1.8} \quad \Big| + \frac{32}{1.8}$$

$$y + \frac{32}{1.8} = \frac{1}{1.8}x \quad \Big| \cdot 1.8$$

$$1.8\left(y + \frac{32}{1.8}\right) = x$$

$$x = 1.8y + 32$$

$$\underline{f^{-1}(y) = 1.8y + 32}$$

$$f^{-1}(0) = \cancel{1.8\cdot} 0 + 32 = 32 \checkmark$$

$$f^{-1}(100) = 1.8\cdot 100 + 32 = 180 + 32 = 212 \checkmark$$

$$f^{-1}(21) = 1.8\cdot 21 + 32 = 37.8 + 32 = \underline{69.8\ °F}$$

21 °C

Aufgabe 6 Für eine kleine Produktion betragen die Fixkosten CHF 16'500 pro Monat. Fixkosten sind Kosten, die unverändert anfallen, egal wie viel produziert wird. Die Produkte können für CHF 50 pro Stück verkauft werden. Die Produktionskosten betragen CHF 28'000 pro 1000 Stück.

a) Stelle die lineare Funktion für den Umsatz $u(x)$ auf, d.h. wie viel Geld das Unternehmen einnimmt, wenn es x Produkte verkauft.

b) Stelle die lineare Funktion für die Kosten $k(x)$ auf, d.h. wie viel Geld das Unternehmen insgesamt ausgibt, um x Produkt zu produzieren.

c) Ab welcher Stückzahl x (pro Monat) ist die Produktion rentabel?

d) Wie viel Geld verdient das Unternehmen, wenn es in 3 Monaten 12'000 Stück verkauft?

Anz. Stück

a) $\underline{u(x) = 50 \cdot x}$

Umsatz

Anz. Stück

b) $\underline{k(x) = 28 \cdot x + 16'500}$

Kosten pro Monat

c) $u(x) \overset{!}{=} k(x)$

$$50x = 28x + 16'500 \quad | -28x$$

$$22x = 16'500 \quad | :22$$

$$x = \frac{16'500}{22} = \frac{\cancel{11} \cdot 1500}{2 \cdot \cancel{11}} = 750$$

$\Rightarrow$ $\underline{750 \text{ Stück}}$

d) 3 Monate: 12'000 Stück
1 Monat: 4'000 Stück

$$u(x) - k(x) \underset{x=4000}{=} u(4000) - k(4000)$$

$$50 \cdot 4000 - (28 \cdot 4000 + 16'500)$$

$$\underbrace{200'000 - 112'000}_{88'000} - 16'500$$

$$\begin{array}{r} 88'000 \\ -\ 16'500 \\ \hline 71'500 \end{array} \text{ (pro Monat)} \longrightarrow 3 \cdot 71'500 = \begin{array}{r} 210'000 \\ 4'500 \\ \hline \text{CHF } 214'500 \end{array}$$