Aufgabe 1: Berechne die folgenden Summen:

a) Summe aller Dreierzahlen von 99 bis 9'999.

$a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ \ldots,\ a_{33} = 99,\ \ldots,\ a_{3333} = 9999$

AF: $d = 3$

expl. Def: $a_n = 3n$

AR: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$s_{3333} - s_{32} = \frac{3333}{2}(3 + 9999) - \frac{32}{2}(3 + 96)$

$= \underline{16'666'749}$

b) Summe aller geraden Zahlen von 500 bis 5'000.

$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ \ldots,\ a_{250} = 500,\ \ldots$

$a_{2500} = 5000$

$s_{2500} - s_{249} = \frac{2500}{2} \cdot (2 + 5000) - \frac{249}{2}(2 + 498)$

$= \underline{6'190'250}$

c) Summe aller Neunerzahlen von -99 bis 999

$a_1 = -99,\ a_2 = -90,\ a_3 = -81,\ \ldots,\ a_{123} = 999$

expl. Def:

$a_n = 9n - 9 - 99 = 9n - 108$

$9n - 108 \overset{!}{=} 999 \quad | +108$

$9n = 1107 \quad | :9$

$n = 123$

$\Rightarrow a_{123} = 999$

$s_{123} = \underbrace{a_1}_{-99} + \ldots + \underbrace{a_{123}}_{999} = \frac{123}{2} \cdot (-99 + 999)$

$= \underline{55'350}$

Aufgabe 2: Eine arithmetische Folge beginnt mit 21 und endet mit 246. Die Summe ihrer Glieder beträgt 2'136.

a) Wie viele Glieder hat die Folge?

geg: $a_1 = 21$, $a_n = 246$, $s_n = 2136$ (AF)

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 2136$$

$$\frac{n}{2}(\underbrace{21 + 246}_{267}) = 2136 \quad | :267$$

$$\frac{n}{2} = \frac{2136}{267} \quad | \cdot 2$$

$$n = \frac{2 \cdot 2136}{267} = 16 \quad \Rightarrow \quad \underline{16 \text{ Folgeglieder}}$$

b) Wie viel beträgt s_{12}?

$a_1 = 21$, $a_{16} = 246$, $s_{16} = 2136$ (AF)

aus a)

$$s_{12} = \frac{12}{2}(21 + a_{12}) = \frac{12}{2}(21 + 186) = \underline{1242}$$

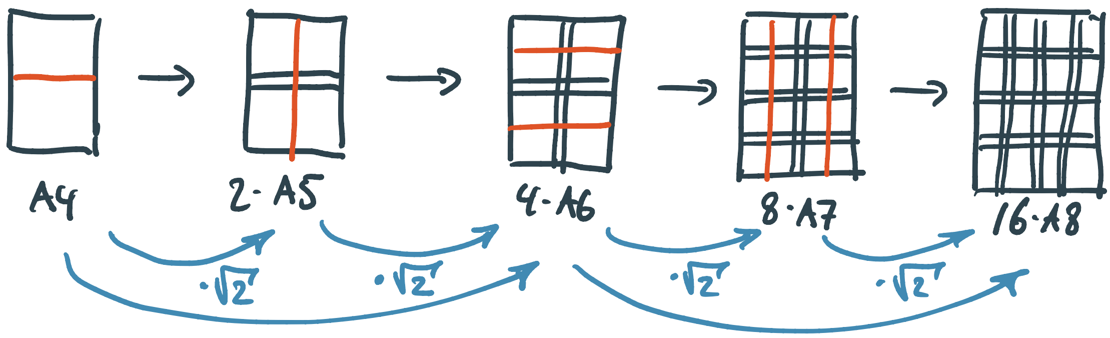
$$15d = a_{16} - a_1 = 246 - 21 = 225$$

$$d = 15$$

$$\Rightarrow a_{12} = a_{16} - 4d = 246 - 60 = 186$$

Aufgabe 3: Ein A4-Blatt hat die Seitenkanten 21cm und (gerundet) 30cm. Durch zweimaliges Halbieren eines A4-Blatts erhalten wir vier A6-Blätter. Die Summe aller Papierkanten ist jetzt ein Vielfaches des ursprünglichen Umfangs des A4-Blatts. Führen wir diesen Prozess weiter, so wird die Länge aller Papierkanten immer grösser.

a) Zeige, dass die Längen aller Papierkanten eine spezielle Folge darstellen.



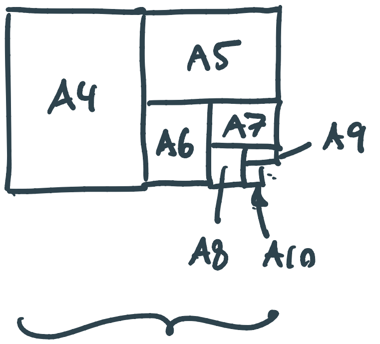
·2 (doppelte Kantenlänge)

·2

GF, da Multiplikation mit einer Konstante

$\cdot q^2 = \cdot 2 \rightarrow \underline{q = \sqrt{2}}$

b) Angenommen, wir setzen ein A4-, ein A5-, ein A6-Blatt usw. nebeneinander, hören aber nie auf. Wie viel Papierfläche (gerechnet in A4-Blättern) braucht es für die ganze unendliche Reihe?



<u>2 A4-Blätter</u>

Aufgabe 4: Für die folgenden geometrischen Folgen bzw. Reihen ist jeweils s_{10} zu berechnen.

a) $(a_n) = 1,\ 2.5,\ 6.25,\ \dots$

$q = 2.5$

$a_1 = 1$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_{10} = 1 \cdot \frac{2.5^{10} - 1}{2.5 - 1}$$

$$s_{10} = \underline{6357.16}$$

b) $a_2 = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{1}{12}$ (GF)

$\cdot q^2$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{3/4}{1/3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{4}$$

$$\left(a_1 = \frac{3/4}{-1/3} = -\frac{9}{4} \right)$$

$$q^2 = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{12 \cdot 3} = \frac{\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{36}_{\,9}} = \frac{1}{9}$$

$\frac{1}{12} \cdot \frac{4}{3}$

$\frac{3}{4} \cdot q^2 = \frac{1}{12}$

$$q^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{3}$$

$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \underset{q = \frac{1}{3}}{=} \frac{9}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{3} - 1} =$$

$$\underline{s_{10} = 3.375}$$

$q = -\frac{1}{3} \rightarrow \underline{s_{10} = -1.6874}$ (2. Lösung)

c) $a_{10} = 1536,\ q = 2$

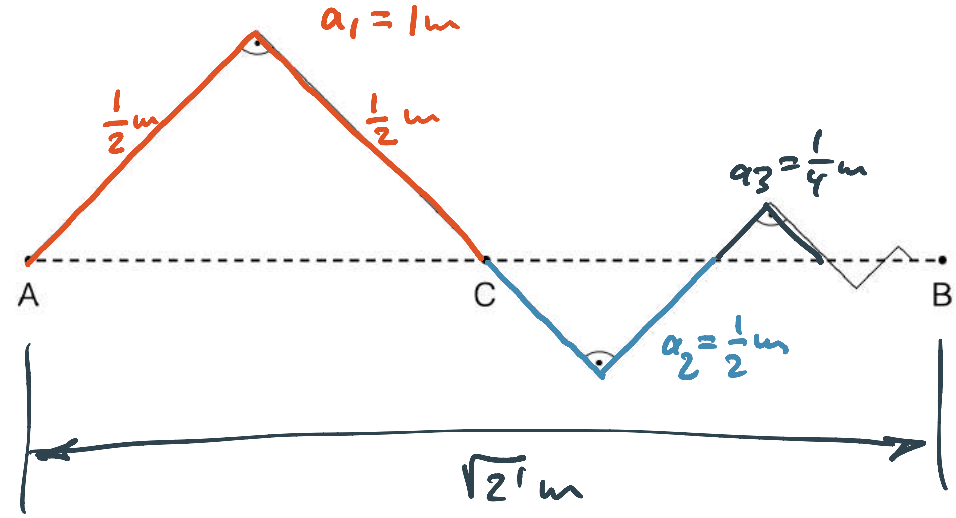
$$a_1 \cdot q^9 = a_{10}$$

$$\rightarrow a_1 = \frac{a_{10}}{q^9} = \frac{1536}{2^9} = 3$$

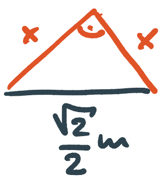
$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = \underline{3069}$$

Aufgabe 5: Zwischen den Punkten A und B verläuft ein Zickzackweg mit unendlich vielen rechten Winkeln. Er ist folgendermassen konstruiert: Auf halber Strecke zwischen A und B befindet sich C. Dann führt der Zickzack unten durch und erreicht die Hälfte der verbleibenden Strecke zwischen C und B. Dann wir diese verbleibende Strecke halbiert usw.

Berechne die Länge des Zickzackwegs, wenn die direkte Verbindung von A nach B genau $\sqrt{2}$ m entspricht.



Pythagoras



$$x^2 + x^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{GF:} \quad a_1 = 1 \,, \quad q = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$\underline{S_\infty = 2\text{m}}$$