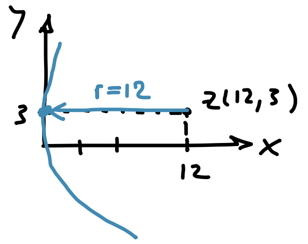
Aufgabe 1: Stelle die Gleichungen der Kreise auf, die mit den folgenden Angaben definiert sind:

a) Zentrum $Z(3,2)$, Radius $r = 7$ $\rightarrow 7^2$

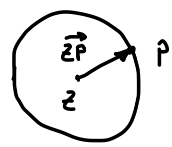
$$k: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 49$$

b) Zentrum $Z(12,3)$, Kreis berührt die y-Achse.



$$k: (x-12)^2 + (y-3)^2 = 144$$

c) Zentrum $Z(6,-1)$, Kreis verläuft auch durch $P(10,2)$.



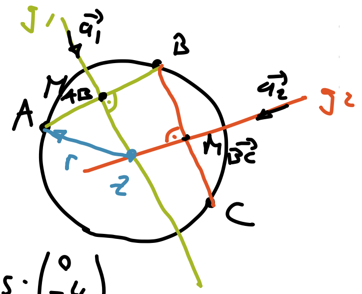
$|\vec{ZP}| = r$

$$\vec{ZP} = \begin{pmatrix} 10-6 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{ZP}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9}$$

$$|\vec{ZP}| = \sqrt{25} = 5 = r$$

$$k: (x-6)^2 + (y+1)^2 = 25$$

d) Kreis verläuft durch die Punkte $A(-1,2)$, $B(3,2)$ und $C(1,4)$



$$\vec{OM_{AB}} = \vec{OA} + \tfrac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+1 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a_1} \perp \vec{AB} \qquad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$g_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OM_{BC}} = \vec{OB} + \tfrac{1}{2}\vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a_2} \perp \vec{BC} \qquad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

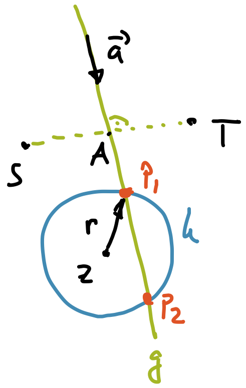
$$g_2: \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow Z(1,2)$

$$g_1 \stackrel{!}{=} g_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{\ 1 = 2 + 2t \rightarrow 2t = -1 \rightarrow t = -\tfrac{1}{2}$$

Radius: $|\vec{ZA}| = r = \left|\begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 2$ $\qquad k: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

Aufgabe 2: Finde die Punkte P_1 und P_2 auf dem Kreis k, die von den beiden Punkten $S(7,-2)$ und $T(11,2)$ den gleichen Abstand haben.



$$k:\quad (x-5)^2+(y-4)^2=18 \quad \rightarrow r=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$\hookrightarrow Z(5,4)$

$$\vec{OA}=\vec{OS}+\tfrac{1}{2}\vec{ST}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}+\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}11-7\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7+\frac{1}{2}\cdot 4\\-2+\frac{1}{2}\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow A(9,0)$

$$\vec{a}\perp\vec{ST}\qquad \vec{ST}=\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}\rightarrow \vec{a}=\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$$

$$g:\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}\rightarrow & x=9-4s\\ \rightarrow & y=4s\end{matrix}$$

einsetzen in k:

$$(9-4s-5)^2+(4s-4)^2=18$$
$$(4-4s)^2+(4-4s)^2=18$$
$$\cancel{2}\cdot(4-4s)^2=\cancel{18}\,9 \longrightarrow 4-4s=\pm 3$$

1. Lösung: $4-4s=3 \quad |-4$

$-4s=-1$

$s=\frac{1}{4} \longrightarrow$ in g einsetzen $\begin{pmatrix}9+\frac{1}{4}\cdot(-4)\\0+\frac{1}{4}\cdot 4\end{pmatrix}$

$$\vec{OP_1}=\begin{pmatrix}9-1\\0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \underline{P_1(8,1)}$

2. Lösung: $4-4s=-3 \quad |-4$

$-4s=-7 \quad |:(-4)$

$s=\frac{7}{4} \longrightarrow$ in g einsetzen $\begin{pmatrix}9+\frac{7}{4}\cdot(-4)\\0+\frac{7}{4}\cdot 4\end{pmatrix}$

$$\vec{OP_2}=\begin{pmatrix}9-7\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \underline{P_2(2,7)}$

Aufgabe 3: Die beiden Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in zwei Punkten. Finde die beiden Schnittpunkte P_1 und P_2 und stelle die Gleichung der gemeinsamen Sekanten auf, die durch die beiden Punkte verläuft.

$$k_1: \quad (x-9)^2 + y^2 = 18 \quad \longrightarrow \quad y^2 = 18 - (x-9)^2$$

$$k_2: \quad x^2 + y^2 = 45 \quad \longrightarrow \quad y^2 = 45 - x^2$$

gleichsetzen:

$$18 - (x-9)^2 = 45 - x^2$$

$$18 - \cancel{x^2} + 18x - 81 = 45 - \cancel{x^2} \qquad | + x^2 + 81 - 18$$

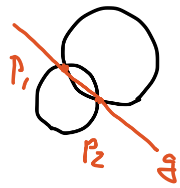
$$18x = 45 + 81 - 18 = 108 \qquad | :9$$

$$2x = 12 \qquad | :2$$

$$\underline{x = 6}$$

$$\hookrightarrow \quad y^2 = 45 - x^2 = 45 - 36 = 9 \quad \longrightarrow \quad \underline{y = \pm 3}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{P_1(6,3)}, \quad \underline{P_2(6,-3)}$$



$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ -3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{g: \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 4: Finde die Schnittpunkte A und B der Geraden g mit der Kugel K.

$$g\colon \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \longrightarrow x = 2 + 7s \\ \longrightarrow y = 3 \\ \longrightarrow z = -2 - 3s \end{matrix}$$

$$K\colon \quad (x+1)^2 + (y-8)^2 + (z+9)^2 = 315$$

einsetzen in K:

$$(2+7s+1)^2 + (3-8)^2 + (-2-3s+9)^2 = 315$$

$$(7s+3)^2 + 25 + (-3s+7)^2 = 315$$

$$49s^2 + \cancel{42s} + 9 + 25 + 9s^2 - \cancel{42s} + 49 = 315 \qquad \Big| -25-9-49$$

$$58s^2 = 315 - 25 - 9 - 49 = 232 \qquad \Big| :2$$

$$29s^2 = 116 \qquad \Big| :29$$

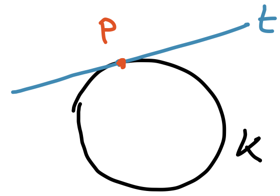
$$s^2 = 4 \quad \longrightarrow \quad s = \pm 2 \quad \longrightarrow \text{in } g \text{ einsetzen: } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \pm 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \pm 14 \\ 3 \\ -2 \mp 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{A(16, 3, -8), \quad B(-12, 3, 4)}$$

Aufgabe 5: Die Gerade t ist eine Tangente an die Kugel K.

$$t: \quad \begin{pmatrix}16\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$$



$$K: \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-11)^2 = 128$$

$r^2 = 128$

a) Bestimme den Berührungspunkt P.

$x = 16 - 2\lambda$
$y = 1 + 2\lambda$ setzen ein K:
$z = 1 + 2\lambda$

$18 \cdot 18 = 180 + 80 + 64 = 324$

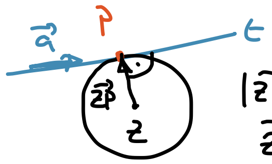
$$(16 - 2\lambda + 2)^2 + (1 + 2\lambda - 3)^2 + (1 + 2\lambda - 11)^2 = 128$$
$$(-2\lambda + 18)^2 + (2\lambda - 2)^2 + (2\lambda - 10)^2 = 128$$
$$4\lambda^2 - 72\lambda + 324 + 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 + 4\lambda^2 - 40\lambda + 100 = 128$$
$$12\lambda^2 - 120\lambda + 428 = 128 \quad | -128$$
$$12\lambda^2 - 120\lambda + 300 = 0$$
$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \rightarrow (\lambda - 5)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 5$$

in t einsetzen

$$\begin{pmatrix}16\\1\\1\end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\11\\11\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{P(6, 11, 11)}$

b) Zeige, dass die Gerade die Kugel tangential berührt.



$|\vec{ZP}| = r$

$\vec{ZP} \perp \vec{a}$

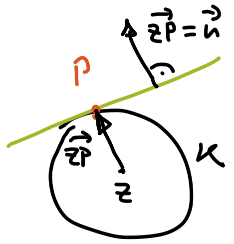
$$\vec{ZP} = \begin{pmatrix}6+2\\11-3\\11-11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{ZP}| = \sqrt{8^2+8^2} = \sqrt{128}$$

$Z(-2, 3, 11)$

$\Rightarrow |\vec{ZP}|^2 = 128$ ✓

$\vec{ZP} \perp \vec{a}$?

$$\vec{ZP} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} = -16 + 16 + 0 = 0 \checkmark$$



$(t \in E)$

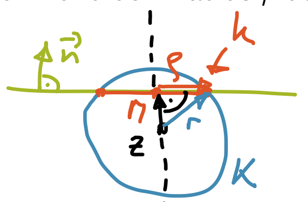
c) Finde die Koordinatenform der Tangentialebene E im Punkt P.

Normalform: $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}x - P_x\\y - P_y\\z - P_z\end{pmatrix} = 0$

$\vec{ZP}$

$$\begin{pmatrix}8\\8\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-6\\y-11\\z-11\end{pmatrix} = 8 \cdot (x-6) + 8 \cdot (y-11) = 0 \quad |:8$$
$$x - 6 + y - 11 = 0$$
$$\underline{E: \; x + y - 17 = 0}$$

Aufgabe 6: Die Ebene E schneidet die Kugel K. Finde den Mittelpunkt M und den Radius ρ des Kreises k als Schnittmenge von Kugel und Ebene.



Tipp: Suche den Lotfusspunkt des Kugelzentrums Z auf E.

$\downarrow$ M

$$E: \quad x + y + z = 2$$

$$K: \quad (x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 64$$

$\downarrow$ $Z(5,-1,4)$ $\qquad$ $\uparrow$ $r^2 = 64$ $\downarrow$ $\underline{r = 8}$

l (Lotgerade)

$Z \in l$, Richtung $\vec{n}$

$E: x + y + z = 2$

$x + y + z - 2 = 0$

$1 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) + 1 \cdot (z-0) - 2 = 0$

$1 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) + 1 \cdot (z-2) = 0$

$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A(0,0,2) \in E$ $\longrightarrow$ $l: \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} \to x = 5+s \\ \to y = -1+s \\ \to z = 4+s \end{array}$

schneiden Lotgerade mit E

$(5+s) + (-1+s) + (4+s) = 2$

$5 + s - 1 + s + 4 + s = 2$

$3s + 8 = 2$

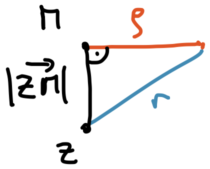
$3s = -6 \quad |:3$

$\underline{s = -2}$

in l: $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -1-2 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{M(3,-3,2)}$

$\vec{ZM} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ -3+1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$



$|\vec{ZM}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}$

$= \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\rho = \sqrt{r^2 - |\vec{ZM}|^2} = \sqrt{64 - 12} = \sqrt{52}$

$\underline{\rho = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}}$