Aufgabe 1: Gegeben ist die Ebene E:

$$E: \quad 6x - y + z = 12$$

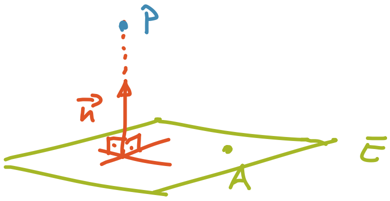
a) Berechne die Achsabschnitte der Ebene E mit den $x-$, $y-$ und $z-$Achsen.

x-Achse $(y=0, z=0) \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = \frac{12}{6} = 2$ $\qquad \underline{A(2,0,0)}$

y-Achse $(x=0, z=0) \rightarrow -y = 12 \rightarrow y = -12$ $\qquad \underline{B(0,-12,0)}$

z-Achse $(x=0, y=0) \rightarrow z = 12$ $\qquad \underline{C(0,0,12)}$

b) Welchen Abstand d_P hat die Ebene vom Punkt $P(1,0,7)$?



$$d_P = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{OP} - \vec{OA})|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AP}|}{|\vec{n}|}$$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-0 \\ 7-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

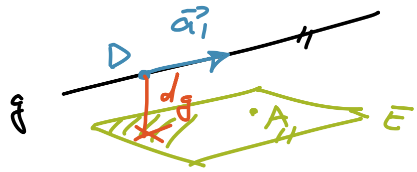
$$E: \underbrace{6x - y + z}_{\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} - 12 = 0$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{36+1+1} = \sqrt{38}$$

$$d_P = \frac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{38}} = \frac{|-6+7|}{\sqrt{38}} = \frac{1}{\sqrt{38}} = \underline{\frac{\sqrt{38}}{38}}$$

c) Zeige, dass die Gerade g parallel zu E ist und berechne dann den Abstand d_g.

$$g: \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{D} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}$$



$$d_g = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AD}|}{|\vec{n}|}$$

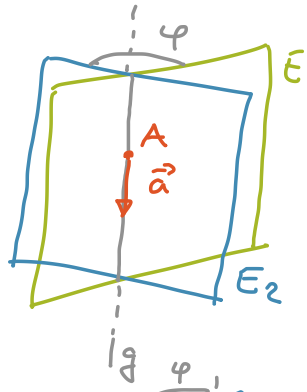
$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 6 - \cancel{3} + \cancel{3} = 6$$

$$\underline{d_g = \frac{6}{\sqrt{38}}}$$

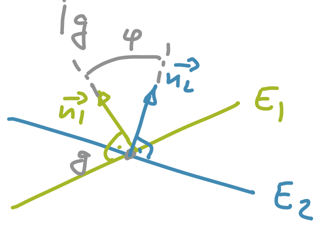
Aufgabe 2: Finde eine Parameterform der Schnittgeraden g, die durch den Schnitt der beiden Ebenen E_1 und E_2 entsteht. Berechne ausserdem den Winkel φ unter welchem sie sich schneiden.

$$E_1: \quad 6x - y + z - 11 = 0$$
$$E_2: \quad x + y + 2z - 10 = 0$$



$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

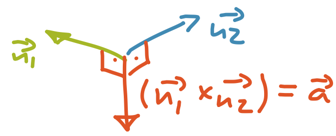
$$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-12 \\ 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{a}$$



gemeinsamer Punkt A ?

$$\begin{aligned} &x = 0 & &E_1 \cap (x=0): & -y + z &= 11 \\ &x = 0 & &E_2 \cap (x=0): & y + 2z &= 10 \end{aligned}$$

$$3z = 21 \rightarrow \underline{z = 7}$$



$$\hookrightarrow -y = 11 - z = 11 - 7 = 4$$
$$\underline{y = -4}$$

$$\hookrightarrow A(0, -4, 7)$$

Kontrolle:

$A \in E_1$? $\quad 6 \cdot 0 - (-4) + 7 - 11 \overset{?}{=} 0 \quad ✓ \quad A \in E_1$

$A \in E_2$? $\quad 0 + (-4) + 2 \cdot 7 - 10 \overset{?}{=} 0 \quad ✓ \quad A \in E_2$

$\Big\} \; A \in g$

$$\Rightarrow \quad \underline{g: \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} = |\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}| \cdot \cos\varphi$$

$$\hookrightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{6}} = \frac{6 - 1 + 2}{\sqrt{228}}$$

$$\cos\varphi = \frac{7}{\sqrt{228}} \longrightarrow \underline{\varphi = 62.4°}$$

Aufgabe 3: Der Würfel mit Seitenkante $s = 4$ wird durch die Ebene E geschnitten. Zeichne die Schnittfläche der Ebene mit dem Würfel.

Achsabschnitte:

x-Achse ($y=0, z=0$) $\quad 3x - 12 = 0$

$\qquad x = \frac{12}{3} = 4$

$A(4,0,0)$

y-Achse ($x=0, z=0$) $\quad -2y - 12 = 0$

$\Leftrightarrow y = -6$

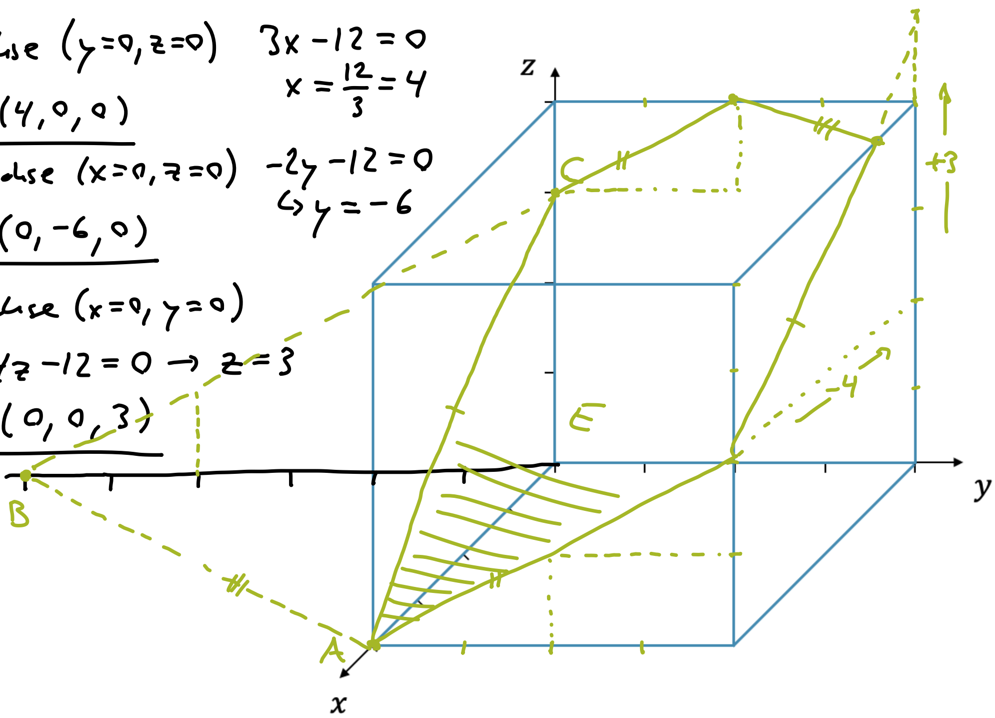
$B(0,-6,0)$

z-Achse ($x=0, y=0$)

$4z - 12 = 0 \rightarrow z = 3$

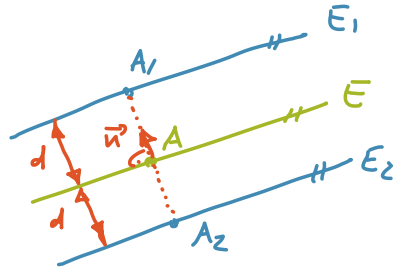
$C(0,0,3)$

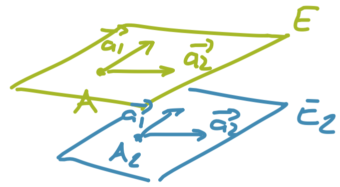
$$E: \quad 3x - 2y + 4z - 12 = 0$$



Aufgabe 4: Finde die Koordinatenform der beiden Ebenen, die parallel zur Ebene E verlaufen und den Abstand $d = 3$ haben.

$$E\colon \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{A} + \lambda_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}_{\vec{a_1}} + \lambda_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}}_{\vec{a_2}}$$





$$\vec{n} = \vec{a_1} \times \vec{a_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-4\\2\end{pmatrix} \longrightarrow |\vec{n}| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$$

$$\begin{matrix}1 & -2\\ 0 & 2\end{matrix}$$

$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4\\-4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4/6\\-4/6\\2/6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{AA_1} = 3 \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = 3 \cdot \begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \vec{OA_1} = \vec{OA} + \vec{AA_1}$$

$$= \begin{pmatrix}1+(-2)\\1+(-2)\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $\underline{A_1(-1,-1,2)}$

$$\underline{E_1\colon \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}}$$

$$\vec{AA_2} = (-3) \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = -\vec{AA_1} = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \longrightarrow \vec{OA_2} = \vec{OA} + \vec{AA_2} = \begin{pmatrix}1+2\\1+2\\1+(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $\underline{A_2(3,3,0)}$

$$\underline{E_2\colon \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5: Bestimme den Durchstosspunkt P der Geraden g durch E, sofern vorhanden.

a) $E: \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}7\\4\\7\end{pmatrix}, \quad g: \begin{pmatrix}-2\\1\\9\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}7.5\\2.5\\2\end{pmatrix}$

$x: \; 0 + 5\lambda_1 + 7\lambda_2 \overset{!}{=} -2 + 7.5s \quad ①$

$y: \; 0 + \quad + 4\lambda_2 = 1 + 2.5s \quad ② \rightarrow 7 \cdot ②$

$z: \; 2 + \lambda_1 + 7\lambda_2 = 9 + 2s \quad ③$

$28\lambda_2 = 7 + 17.5s$

$ⓐ \; -28\lambda_2 = -37 - 2.5s$

$0 = -30 + 15s$

$30 = 15s \rightarrow s = 2$

$① \quad 5\lambda_1 + 7\lambda_2 = -2 + 7.5s$

$(-5)\cdot③ \quad -10 - 5\lambda_1 - 35\lambda_2 = -45 - 10s$

$-10 \quad - 28\lambda_2 = -47 - 2.5s$

$ⓐ \quad -28\lambda_2 = -37 - 2.5s$

$g: \begin{pmatrix}-2\\1\\9\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}7.5\\2.5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+15\\1+5\\9+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\6\\13\end{pmatrix}$

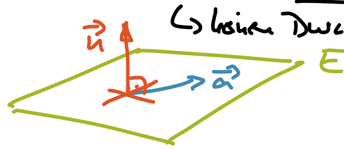
$\rightarrow \underline{P(13, 6, 13)}$

b) $E: \; 3x + 3y - 3z = 3, \quad g: \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{A} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}}_{\vec{a}} \rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 4s \\ z = 4s \end{matrix}$

einsetzen in E: $3 \cdot 1 + \cancel{3 \cdot 4s} - \cancel{3 \cdot 4s} = 3 \rightarrow$ Gl. ist erfüllt für alle s!

Vermutung: $g \in E$ $\quad A \in E$? $\quad 3 \cdot 1 + 3 \cdot \cancel{0} - 3 \cdot \cancel{0} \overset{?}{=} 3 \; ✓ \Rightarrow A \in E$

↳ keinen Durchstoss-punkt

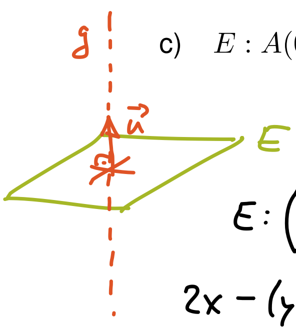


$\vec{a} \in E$?

$\vec{a} \in E \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix} = 0 + 12 - 12 = 0 \; ✓ \; \vec{a} \in E$

c) $E: A(0,1,1) \in E, \; \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \quad g: \begin{pmatrix}9\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \cdot \vec{n} \quad \begin{matrix} \rightarrow x = 9 + 2\lambda \\ \rightarrow y = 0 - \lambda \\ \rightarrow z = 1 - \lambda \end{matrix}$



$E: \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-0\\y-1\\z-1\end{pmatrix} = 0$

$2x - (y-1) - (z-1) = 0$

$2x - y - z + 1 + 1 = 0$

$E: \; \underline{2x - y - z + 2 = 0}$

in E: $2(9 + 2\lambda) - (0 - \lambda) - (1 - \lambda) + 2 = 0$

$18 + 4\lambda + \lambda - 1 + \lambda + 2 = 0$

$6\lambda + 19 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{19}{6}$

$\begin{pmatrix}9\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{19}{6}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}54 - 19 \cdot 2\\0 + 19\\6 + 19\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}16\\19\\25\end{pmatrix}$

↳ $\underline{P\left(\frac{16}{6}, \frac{19}{6}, \frac{25}{6}\right)}$

d) $E: \lambda_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}}_{\vec{a}_1} + \lambda_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}}_{\vec{a}_2}, \quad g: \underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}}_{A} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}6\\1\\7\end{pmatrix}}_{\vec{a}}$

$① \quad 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3 + 6s$

$② \quad 3\lambda_1 - \lambda_2 = 3 + s$

$③ \quad \lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 + 7s$

$① \quad 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 3 + 6s$

$-2③ \quad -2\lambda_1 - 6\lambda_2 = -2 - 14s$

$ⓐ \quad -4\lambda_2 = 1 - 8s$

$② \quad 3\lambda_1 - \lambda_2 = 3 + s$

$-3③ \quad -3\lambda - 9\lambda_2 = -3 - 21s$

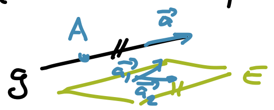
$ⓑ \quad -10\lambda_2 = -20s$

$ⓐ \quad -\lambda_2 = \frac{1}{4} - 2s$

$ⓑ \quad \lambda_2 = \quad 2s$

$0 = \frac{1}{4}$ ↯

→ keine Lösung möglich!
(kein Durchstosspunkt)



$\vec{a} \parallel E \Rightarrow \vec{a}, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ komplanar

$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}] = 0$ und $A \notin E$

$\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-4\\-8\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}10\\-4\\-8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\1\\7\end{pmatrix} = 10 \cdot 6 - 4 \cdot 1 - 8 \cdot 7 = 60 - 4 - 56 = 0$

↳ $\vec{a} \parallel E$

$E: \begin{pmatrix}10\\-4\\-8\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{pmatrix} = 0$

↳ $\underline{E: 10x - 4y - 8z = 0}$

ist $A \in E$? $\quad 10 \cdot 3 - 4 \cdot 3 - 8 \cdot 1 \overset{?}{=} 0$

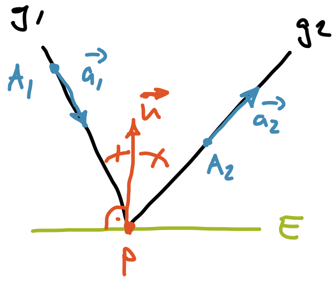
$30 - 12 - 8 \neq 0 \quad A \notin E$

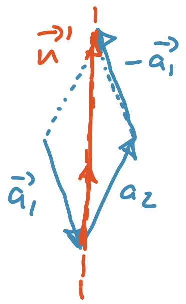
Aufgabe 6: Ein Laserstrahl, der sich in Richtung der Geraden g_1 bewegt, trifft auf einen Spiegel und wird in Richtung der Geraden g_2 reflektiert. Finde die Koordinatenform der Spiegelebene.

Tipp: Finde den Reflexionspunkt und ermittle den Normalvektor der Spiegelebene.

$$g_1: \overbrace{\begin{pmatrix}4\\9\\7\end{pmatrix}}^{A_1} + s \cdot \overbrace{\begin{pmatrix}-1\\-4\\-2\end{pmatrix}}^{\vec{a}_1} \qquad |\vec{a}_1| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$$

$$g_2: \underbrace{\begin{pmatrix}3\\3\\7\end{pmatrix}}_{A_2} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}}_{\vec{a}_2} \qquad |\vec{a}_2| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$





$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \vec{n}' = \begin{pmatrix}-1+1\\2+4\\4+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\\6\end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$$ Richtung der Ebene

Schnittpunkt $P = g_1 \cap g_2$:

$$\begin{pmatrix}4\\9\\7\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\-2\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}3\\3\\7\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}3\\3\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+1\\3-2\\7-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ $\underline{P(4,1,3)}$ Position der Ebene

$$\begin{aligned} 4-s &= 3-t &\rightarrow\quad -s+t &= -1 \\ 9-4s &= 3+2t &\rightarrow\quad -4s-2t &= -6 &\rightarrow\quad 2s+t &= 3 \\ 7-2s &= 7+4t &\rightarrow\quad -2s-4t &= 0 &\rightarrow\quad -2s-4t &= 0 \end{aligned}$$

$$-3t = 3 \rightarrow \underline{t = -1}$$

$$E: \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-4\\y-1\\z-3\end{pmatrix} = 0 \longrightarrow (y-1)+(z-3) = 0$$

$$y + z - 1 - 3 = 0$$

$$\underline{E: y + z - 4 = 0}$$

Kontrolle: $P \in E$? $\quad 1+3-4 = 0$ ✓