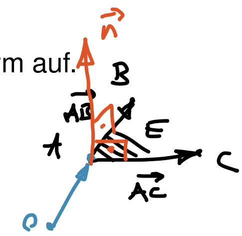
Aufgabe 1: Gegeben sind die folgenden Elemente der Ebene E.
Stelle für sie eine gültige Parameterform, die Normalform und die Koordinatenform auf.



a) $A(-1,0,8),\ B(2,2,0),\ C(-1,1,3)$ und $A,B,C \in E$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 2-0 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 1-0 \\ 3-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{E: \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+8 \\ 0+15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & & 0 \\ 2 & & 1 \end{matrix}$$

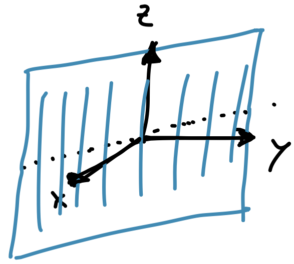
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{OP} - \vec{OA}\right) = \underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \\ z-8 \end{pmatrix}} = -2(x+1) + 15y + 3(z-8) = 0$$

$$-2x + 15y + 3z - 2 - 24 = 0$$

$$E: \underline{-2x + 15y + 3z - 26 = 0}$$

b) $A(0,0,3),\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $A \in E$



$$\vec{n} \cdot \left(\vec{OP} - \vec{OA}\right) = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-3 \end{pmatrix} = 0} \qquad E: \underline{x + y = 0}$$

$B(0,0,0) \in E$

$C(1,-1,1) \in E$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ -1-0 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{E: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

c) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A(2,2,2)$ und $A, \vec{a_1}, \vec{a_2} \in E$

$$\underline{E: \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & & 1 \\ -1 & & 0 \end{matrix}$$

$$\underline{E: \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-2 \end{pmatrix} = 0}$$

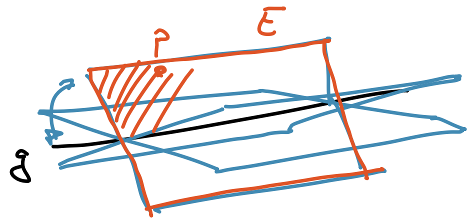
$$\hookrightarrow -(x-2) - 6(y-2) + (z-2) = 0$$

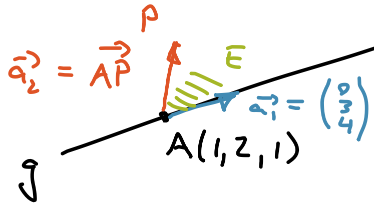
$$-x - 6y + z + \cancel{2} + 12 - \cancel{2} = 0$$

$$E: \underline{-x - 6y + z + 12 = 0}$$

Aufgabe 2: Finde die Ebene E, die sowohl den Punkt P beinhaltet, wie auch die Gerade g. Stelle für diese Ebene die Koordinatenform auf und überprüfe, ob wirklich $P \in E$ erfüllt ist.

a) $P(2,3,0),\ g: \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{OA}} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$





$$\vec{AP} = \begin{pmatrix}2-1\\3-2\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\\0\\3\end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\\1\\1\end{array} = \begin{pmatrix}-3-4\\4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\4\\-3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-7\\4\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-1\end{pmatrix} = 0$$

$$-7(x-1)+4(y-2)-3(z-1) = 0$$

$$-7x+4y-3z\underbrace{+7-8+3} = 0$$

$$E: \underline{-7x+4y-3z \quad +2 = 0}$$

b) $P(4,1,0),\ g: \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix}4-0\\1-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix} \rightarrow E: \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$$

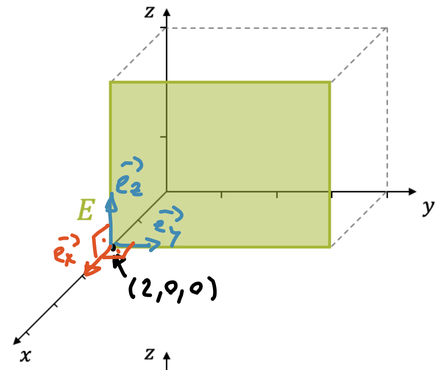
$$\vec{n} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\\1\\1\end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}\\4\\1\end{array} = \begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-1\end{pmatrix} = 0$$

$$-2x+5y-3(z-1) = 0$$

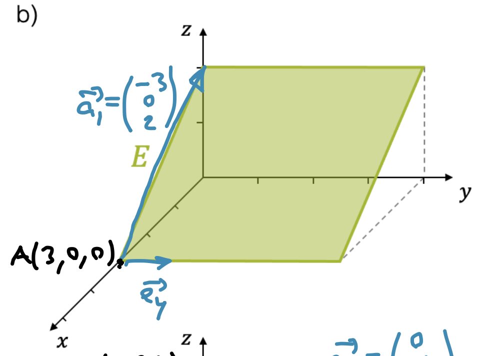
$$E: \underline{-2x+5y-3z+3 = 0}$$

Aufgabe 3: Finde die Koordinatenform der folgenden Ebenen.

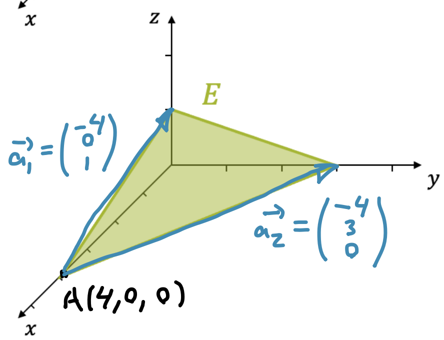
a)



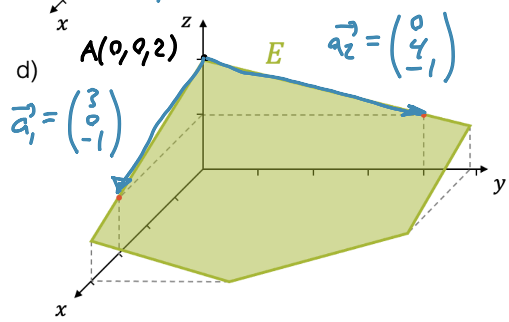
b)



c)



d)



a) $E: \underline{x = 2}$ $\quad \vec{a}_1 = \vec{e}_z = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{e}_x$

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-2\\y-0\\z-0\end{pmatrix} = 1\cdot(x-2) = 0 \qquad \underline{x = 2}$

b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-3\\y-0\\z-0\end{pmatrix} = 0$

$-2(x-3) - 3z = 0$

$E: \underline{-2x - 3z + 6 = 0}$

c) $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-4\\-12\end{pmatrix} \rightarrow \vec{n}_2 = \begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3\\4\\12\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-4\\y-0\\z-0\end{pmatrix} = 0 \rightarrow 3(x-4) + 4y + 12z = 0$

$E: \underline{3x + 4y + 12z - 12 = 0}$

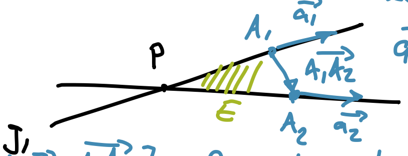
d) $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-2\end{pmatrix} = 4x + 3y + 12(z-2) = 0$

$E: \underline{4x + 3y + 12z - 24 = 0}$

Aufgabe 4: Die zwei Geraden spannen zusammen eine Ebene auf.
Zeige zuerst, dass dem so ist und stelle dann eine Parameterform dieser Ebenen auf.

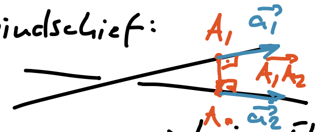
a) $g_1: \underbrace{\begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix}}_{A_1} + s\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{a_1}}$, $g_2: \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}}_{A_2} + t\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}}_{\vec{a_2}}$

→ nicht kollinear $\vec{a_1}\times\vec{a_2}\neq 0$



$[\vec{a_1}\,\vec{a_2}\,\overrightarrow{A_1A_2}] = 0$ → komplanar

windschief:



→ keine Ebene

$[\vec{a_1}\,\vec{a_2}\,\overrightarrow{A_1A_2}]\neq 0$

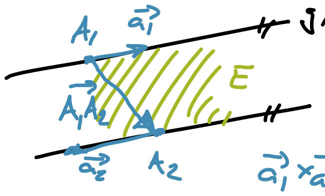
$$\vec{a_1}\times\vec{a_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\neq 0 \qquad \begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{matrix}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix}0+5\\1-4\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{|[\vec{a_1}\,\vec{a_2}\,\overrightarrow{A_1A_2}]|}_{|(\vec{a_1}\times\vec{a_2})\cdot\overrightarrow{A_1A_2}|} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\0\end{pmatrix} = 0$$

→ nicht kollinear, aber komplanar

→ es gibt einen Schnittpunkt P



$\vec{a_1}\times\vec{a_2} = 0$

$\overrightarrow{A_1A_2}\times\vec{a_1}\neq 0$

$(\overrightarrow{A_1A_2}\times\vec{a_2})\neq 0$

$$\begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-2\\1+6\\2+0\end{pmatrix}$$

$$= P(-2,7,2)$$

$$\begin{matrix}-5+s = -t\\ 4+s = 1+3t\\ (2 = 2)\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}s+t = 5\\ -s+3t = 3\\ \hline 4t = 8 \rightarrow \underline{t=2}\end{matrix}$$

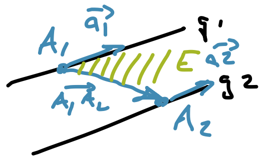
$$\underline{E: \begin{pmatrix}-2\\7\\2\end{pmatrix} + \lambda_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}}$$

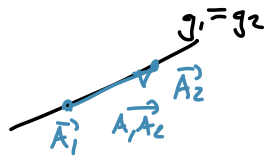
b) $g_1: \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\8\end{pmatrix}}_{A_1} + s\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}}_{\vec{a_1}}$, $g_2: \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{A_2} + t\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}}_{\vec{a_2}}$

$\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}$ weil $\vec{a_1} = 2\cdot\vec{a_2}$

$$\left(\vec{a_1}\times\vec{a_2} = \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

2 Möglichkeiten:





$\vec{a_1}\times\overrightarrow{A_1A_2}\neq 0$

$\vec{a_1}\times\overrightarrow{A_1A_2} = 0$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix}0-1\\0-0\\1-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-7\end{pmatrix}$$

$$\vec{a_1}\times\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-28-0\\-8+14\\0+4\end{pmatrix}\neq 0 \qquad \begin{matrix}2 & -1\\ 4 & 0\end{matrix}$$

↳ es gibt eine Ebene E, da $g_1 \neq g_2$ ($g_1 \parallel g_2$)

$$\underline{E: \begin{pmatrix}1\\0\\8\end{pmatrix} + \lambda_1\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-7\end{pmatrix}}$$

Aufgabe 5: Die beiden Geraden g_1 und g_2 sind windschief. Verschiebe die Gerade g_2 parallel und zwar so, dass sie mit g_1 in einer Ebene liegt. Finde dann die drei Formen der Ebenendefinition.

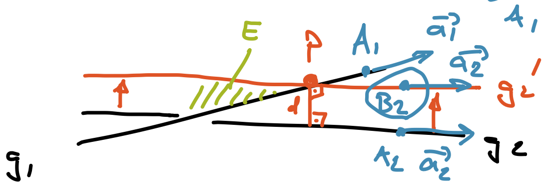
$$g_1: \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{A_1} + s\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}}_{\vec{a_1}}, \quad g_2: \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{A_2} + t\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}-7\\3\\0\end{pmatrix}}_{\vec{a_2}}$$

$\vec{a_1} \neq k\cdot\vec{a_2}$

$\downarrow$

$\vec{a_1} \times \vec{a_2} \neq 0$

(nicht kollinear)



$$A_1 \in E \rightarrow \quad E: \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_1\cdot\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix}-7\\3\\0\end{pmatrix}$$

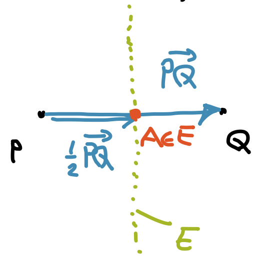
$$\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-7\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-7\\9+49\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-7\\58\end{pmatrix} \longrightarrow E: \begin{pmatrix}-3\\-7\\58\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-1\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix}3 & & -7\\ 7 & & 3\end{matrix}$$

$$-3\cdot x - 7y + 58(z-1) = 0$$

$$E: -3x - 7y + 58z - 58 = 0$$

Aufgabe 6: Finde die Punktemenge, die zu den beiden Punkten $P(-1,-1,-2)$ und $Q(5,3,4)$ den gleichen Abstand haben. Mache anschliessend eine Skizze im dreidimensionalen Koordinatensystem mit den beiden Punkten P und Q, sowie der gefundenen Punktmenge.



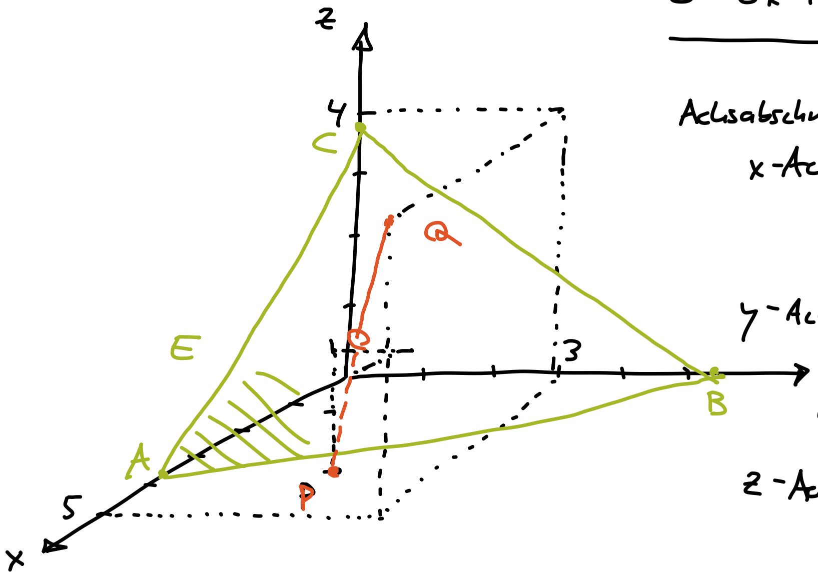
$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 3+1 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{2}\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} + \frac{1}{2}\vec{PQ} = \vec{OA}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow A(2,1,1)$$

$\vec{PQ} \perp E \longrightarrow$ Normalform von E: $$\underline{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0}$$

↳ Koordinatenform von E:
$$6(x-2)+4(y-1)+6(z-1)=0$$
$$6x+4y+6z\underbrace{-12-4-6}$$
$$\underline{E: 6x+4y+6z-22=0}$$



Achsabschnitte:

x-Achse $(y=0, z=0)$
$$6x-22=0 \rightarrow x = \frac{22}{6} = 3\tfrac{2}{3}$$
$A(3\tfrac{2}{3}, 0, 0)$

y-Achse $(x=0, z=0)$
$$4y-22=0 \rightarrow y = \frac{22}{4} = 5.5$$
$B(0, 5.5, 0)$

z-Achse $(x=0, y=0)$
$$6z-22=0 \rightarrow z = 3\tfrac{2}{3}$$
$C(0, 0, 3\tfrac{2}{3})$