Aufgabe 1: Fülle für die folgenden Logarithmen die Wertetabelle aus, ohne Taschenrechner. Übertrage dann die Werte in ein x, y-Diagramm und zeichne die Verläufe der Funktionen.

a) $f_1(x) = \log_2(x)$

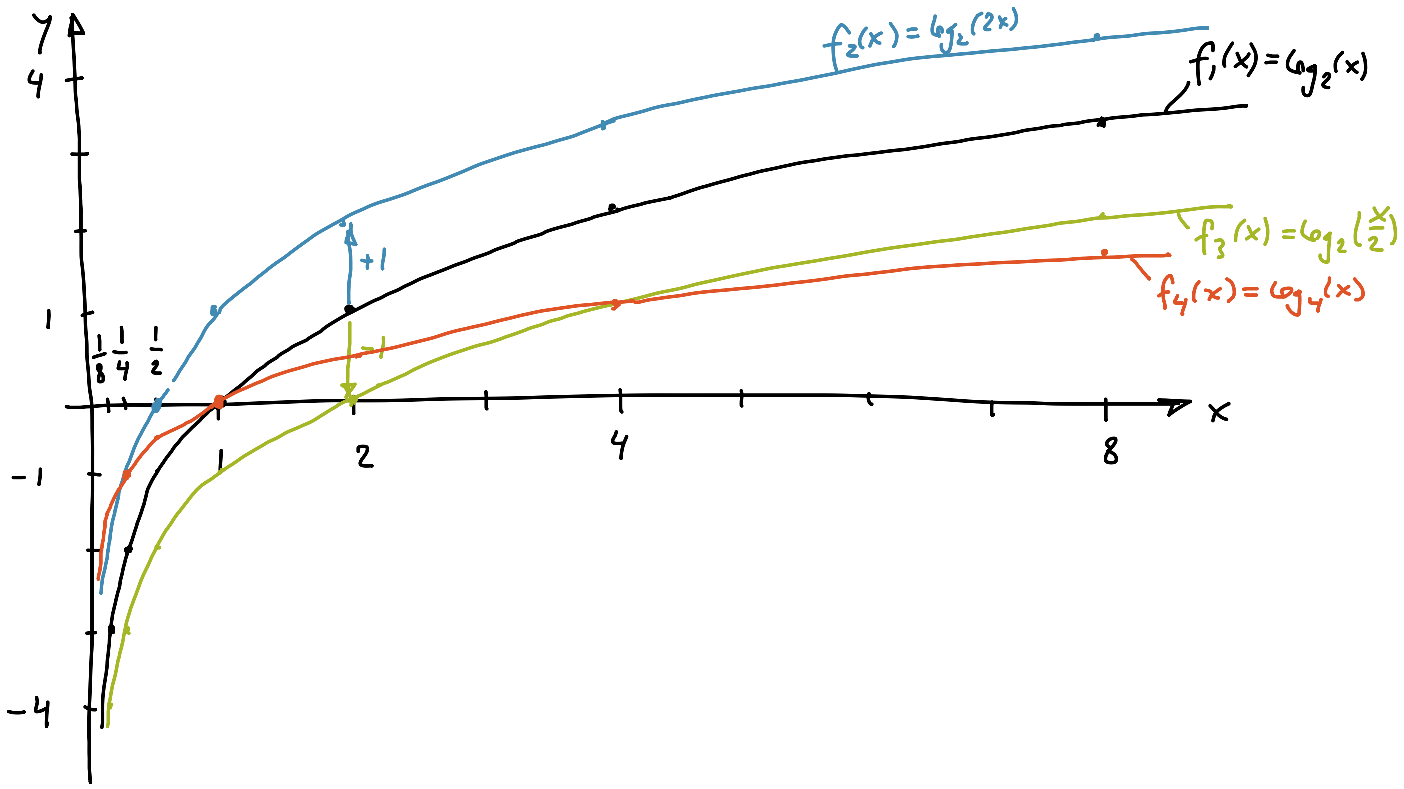
b) $f_2(x) = \log_2(2x)$

c) $f_3(x) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $f_4(x) = \log_4(x)$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f_1(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_2(x)$	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_3(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f_4(x)$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

$4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = 2^3 = 8$



Aufgabe 2: Berechne die Werte für x indem du den Logarithmus auf die Gleichung anwendest und dann einen Ausdruck für x erhältst. Benutze den Taschenrechner erst am Schluss.

Überprüfe schliesslich, ob die Gleichung mit dem errechnen Wert erfüllt wird.

a) $2^x = 1'000$

b) $e^x = 1'000'000$

c) $3^x = 10^{-3}$

d) $8^{(2x+1)} = 888$

e) $e^{\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}$

a) $2^{10} = 1024$

$2^9 = 512$

$2^x = 1000 \quad | \ln$

$\ln 2^x = \ln 1000$

$x \cdot \ln 2 = \ln 1000 \quad |:\ln 2$

$x = \frac{\ln 1000}{\ln 2} = \underline{9.966}$

b) $e^x = 1'000'000 \quad | \ln$

$\underbrace{\ln(e^x)}_{x} = \ln 1'000'000$

$x \cdot \underbrace{\cancel{\ln e}}_{=1} = \ln 1'000'000$

$= \ln 1'000'000 = \underline{13.82}$

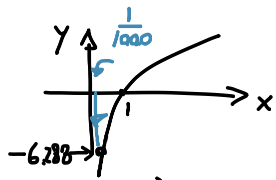
c) $3^x = 10^{-3} \quad | \ln$

$\ln(3^x) = \ln(10^{-3})$

$x \cdot \ln 3 = (-3) \cdot \ln 10$

$x = \frac{(-3) \cdot \ln 10}{\ln 3} = \underline{-6.288}$

$\left(3^x = \frac{1}{1000} = 0.001 \longrightarrow \frac{1}{3^{(-x)}} = 0.001\right)$



d) $8^{(2x+1)} = 888 \quad | \ln$

$\ln\left(8^{(2x+1)}\right) = \ln 888$

$(2x+1) \cdot \ln 8 = \ln 888 \quad |:\ln 8$

$2x+1 = \frac{\ln 888}{\ln 8} \quad |-1$

$2x = \frac{\ln 888}{\ln 8} - 1 \quad |:2$

$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\ln 888}{\ln 8} - 1\right) = \underline{1.132}$

e) $e^{x/3} = \frac{1}{3} \quad | \ln$

$\ln(e^{x/3}) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$\frac{x}{3} \cdot \underbrace{\cancel{\ln e}}_{=1} = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

$\frac{x}{3} = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \quad | \cdot 3$

$x = 3 \cdot \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \ln(3^{-1}) = (-3) \cdot \ln 3$

$\underline{x = -3.296}$

Aufgabe 3: Eine unbekannte Zahl z wird x-mal verdoppelt. Das gleiche Resultat erhalten wir, wenn die Zahl z zwar zwei Mal weniger oft, dafür aber mit 8 multipliziert wird.

Wie gross ist x?

$$z \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2)}_{x\text{-fach}} = \ldots = z \cdot \underbrace{(8 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8)}_{(x-2)\text{-fach}}$$

$$\cancel{z} \cdot 2^x = \cancel{z} \cdot 8^{(x-2)} \quad | : z$$

$$2^x = 8^{(x-2)} \quad | \ln$$

$$\ln(2^x) = \ln(8^{(x-2)})$$

$$x \cdot \ln 2 = (x-2) \cdot \ln 8 \quad | : \ln 2$$

$$x = (x-2) \cdot \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{\ln 8}{\ln 2} \cdot x - 2 \cdot \frac{\ln 8}{\ln 2} \quad \left| - \frac{\ln 8}{\ln 2} x \right.$$

$$x - \frac{\ln 8}{\ln 2} x = -2 \frac{\ln 8}{\ln 2}$$

$$\left(1 - \frac{\ln 8}{\ln 2}\right) \cdot x = -2 \frac{\ln 8}{\ln 2}$$

$$x = - \frac{2 \frac{\ln 8}{\ln 2}}{1 - \frac{\ln 8}{\ln 2}} = - \frac{2 \ln 8}{\ln 2 - \ln 8}$$

$$x = \frac{2 \ln 8}{\ln 8 - \ln 2}$$

$$x = \frac{2 \cdot \ln(2^3)}{\ln(2^3) - \ln 2} = \frac{6 \ln 2}{3 \ln 2 - \ln 2} = \frac{6 \cancel{\ln 2}}{2 \cancel{\ln 2}} \qquad \underline{x = 3}$$

$$z \cdot 2^3 = z \cdot 8^1 \ \checkmark$$

Faktor: $2^x = 8^{(x-2)} = (2^3)^{(x-2)} = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{3 mal mehr verdoppelt}}{}^{x-2}$

$$x = 3 \cdot (x-2) \rightarrow x = 3x - 6 \quad 3x - x = 6 \quad 2x = 6 \quad x = 3$$

Aufgabe 4: Nigeria ist mit einer Bevölkerung von 206.1 Millionen (2020) das bevölkerungsreichste Land Afrikas und weltweit auf Rang 7. Das jährliche Bevölkerungswachstum beträgt 2.6%. Nach China und Indien haben die USA mit 331 Millionen Einwohner die drittgrösste Population, die jährlich um 0.6% anwächst.

a) In welchem Jahr hätte Nigeria gleich viele Einwohner wie die USA, wenn die Wachstumsraten gleich bleiben würden?

b) Wie gross wäre die Bevölkerung beider Länder in diesem Fall?

c) Wie viele Monate braucht Nigeria, um so stark zu wachsen wie die Schweiz aktuell Einwohner hat (8.6 Mio, 2020)?

a)

Nigeria $\rightarrow n_N = n_{N0} \cdot (1+p_N)^t$ $\quad p_N = 2.6\% = 0.026, \quad n_{N0} = 206.1 \cdot 10^6$

USA $\rightarrow n_U = n_{U0} \cdot (1+p_U)^t$ $\quad p_U = 0.6\% = 0.006 \quad n_{U0} = 331 \cdot 10^6$

$$n_N(t) \overset{!}{=} n_U(t) \rightarrow t = ?$$

$$n_{N0} \cdot (1+p_N)^t = n_{U0} \cdot (1+p_U)^t \quad \Big| : (1+p_U)^t \quad : n_{N0}$$

$$\frac{(1+p_N)^t}{(1+p_U)^t} = \frac{n_{U0}}{n_{N0}}$$

$$\left(\frac{1+p_N}{1+p_U}\right)^t = \frac{n_{U0}}{n_{N0}}$$

im Jahr $\underline{2045}$

$$t \cdot \ln\left(\frac{1+p_N}{1+p_U}\right) = \ln\left(\frac{n_{U0}}{n_{N0}}\right)$$

$$t = \frac{\ln(n_{U0}/n_{N0})}{\ln(1+p_N/1+p_U)} = \frac{\ln(331/206.1)}{\ln(1.026/1.006)} = 24.066$$

b)

$$n_N = n_{N0} \cdot (1+p_N)^t = 206.1 \cdot 10^6 \cdot 1.026^{24.066} = \underline{382.25 \cdot 10^6}$$

c) $\Delta n = 8.6 \cdot 10^6$ $\quad (n_{N0} + \Delta n) = n_{N0} \cdot (1+p_N)^t \quad t = ?$ $\quad | : n_{N0}$

$$\frac{n_{N0} + \Delta n}{n_{N0}} = 1 + \frac{\Delta n}{n_{N0}} = (1+p_N)^t \quad | \ln$$

$$\ln\left(1 + \frac{\Delta n}{n_{N0}}\right) = t \cdot \ln(1+p_N) \quad | : \ln(\cdot\cdot)$$

$$t = \frac{\ln\left(1+\frac{\Delta n}{n_{N0}}\right)}{\ln(1+p_N)} = \frac{\ln\left(1+\frac{8.6}{206.1}\right)}{\ln(1.026)} = 1.59\,y \underset{\cdot 12 \frac{M}{y}}{=} \underline{19.1 \text{ Monate}}$$

Aufgabe 5: Finde den Wert von x ohne Taschenrechner.

a) $4^{(x-1)} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

b) $32^{3x} = \frac{1}{4}$

c) $3^{(x+1)} = 9^{(x-1)}$

d) $8^{4x} = 4^8$

e) $125^{(2/3)} = 625^{(1/x)}$

a) $4^{(x-1)} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 2^{1/2}$

$4^{(x-1)} = 2^{1/2} \quad | \ln$

$(x-1) \cdot \ln 4 = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \quad |: \ln 4$

$x - 1 = \frac{\ln 2}{2 \ln 4} \quad |+1$

$x = \frac{\ln 2}{2 \ln 4} + 1 = \frac{\cancel{\ln 2}}{2 \cdot 2 \cancel{\ln 2}} + 1 = \frac{1}{4} + 1$

$4 = 2^2$

$\ln 4 = \ln(2^2) = 2 \cdot \ln 2$

$\underline{x = \frac{5}{4}}$

b) $32^{3x} = \frac{1}{4} = 4^{-1} = (2^2)^{-1} = 2^{2 \cdot (-1)} = 2^{-2}$

$(2^5)^{3x} = 2^{-2}$

$2^{15x} = 2^{-2} \rightarrow 15x = -2 \rightarrow \underline{x = -\frac{2}{15}}$

c) $3^{(x+1)} = 9^{(x-1)} = (3^2)^{(x-1)}$

$3^{x+1} = 3^{2(x-1)} = 3^{2x-2}$

$x + 1 = 2x - 2 \quad | -1$

$x = 2x - 3 \quad | -2x$

$-x = -3$

$\underline{x = 3}$

d) $8^{4x} = 4^8$

$(2^3)^{4x} = (2^2)^8$

$2^{12x} = 2^{16}$

$12x = 16 \rightarrow x = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \quad \underline{x = \frac{4}{3}}$

e) $125^{\frac{2}{3}} = 625^{\frac{1}{x}}$

$125 = 5 \cdot 25 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{5^3}$

$625 = \underbrace{5 \cdot 125}_{5^4}$

$(5^3)^{\frac{2}{3}} = (5^4)^{\frac{1}{x}}$

$5^{\cancel{3} \cdot \frac{2}{\cancel{3}}} = 5^{\frac{4}{x}}$

$5^2 = 5^{\frac{4}{x}}$

$\frac{4}{x} = 2$

$x = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \underline{x = 2}$

Aufgabe 6: Finde den Wert von x <u>ohne</u> Taschenrechner, sofern es eine Lösung gibt.

a) $\ln(x) = -1$

b) $\log_{(-1)}(x) = 2$

c) $\ln\left(x^e\right) = e$

d) $\log_{(-a)}(1-x) = 0$

e) $\log_2(x^2) = -2$

a) $\underbrace{\ln(x)}_{\log_e(x)} = -1 \qquad e^{(..)} \overset{\leftarrow -1}{=} x$

$e^{-1} = x \longrightarrow \underline{x = \frac{1}{e}}$

b) Basis darf nicht negativ sein!

c) $\ln(x^e) = e$

$e \cdot \underbrace{\ln(x)}_{1} = e \longrightarrow \underbrace{\ln(x)}_{\log_e(x)} = 1 \longrightarrow e^1 = x \longrightarrow \underline{x = e}$

d) gilt nur für $\underline{a<0}$ $\longrightarrow$ positive Basis

$\log_{(-a)}(1-x) = 0 \qquad \underbrace{\underline{(-a)}^0}_{=1} = (1-x) \longrightarrow 1-x = 1 \quad |+x-1$

$\underline{x = 0}$

e) $\log_2(x^2) = -2$

$2 \cdot \log_2(x) = -2 \quad |:2 \qquad \log_2(x) = -1$

$2^{-1} = x \longrightarrow \underline{\frac{1}{2} = x}$