Aufgabe 1: Fülle für die folgenden Exponentialfunktionen die Wertetabelle für $x = -2$ bis $x = 4$ aus. Übertrage dann die Werte in ein x, y-Diagramm und zeichne die Verläufe der Funktionen. Schreibe auch hin, ob es sich um ein exponentielles Wachstum oder um einen exponentiellen Zerfall handelt.

a) $f(x) = 2^x$

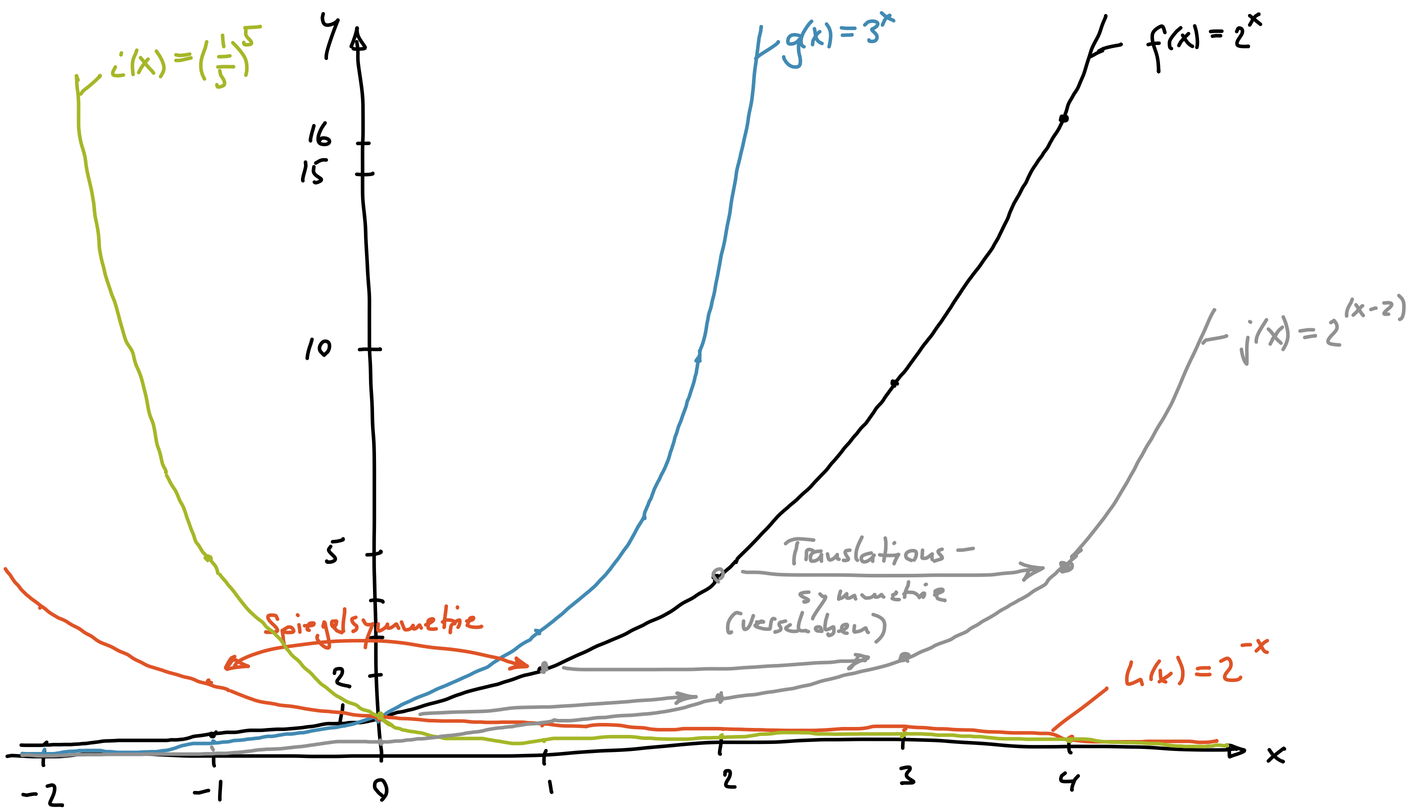
b) $g(x) = 3^x$

c) $h(x) = 2^{(-x)}$

d) $i(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

e) $j(x) = 2^{(x-2)}$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\xrightarrow{\cdot 2}$ 1	2	4	8	16
$g(x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\xrightarrow{\cdot 3}$ 1	3	9	27	81
$h(x)$	4	2	$\xrightarrow{\cdot 1/2}$ 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$i(x)$	25	5	1	$\xrightarrow{\cdot \frac{1}{5}}$ $\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{625}$
$j(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\xrightarrow{\cdot 2}$ 2	4



Aufgabe 2: Im folgenden werden Exponentialfunktionen gesucht, die die Struktur

$$f(x) = a \cdot b^x$$

haben, d.h. mit einem Vorfaktor a und einer Basis b. Finde die jeweiligen Werte von a und b, wenn du weisst, dass die Funktion f durch die beiden Punkte P und Q verläuft.

a) $P(-1, \frac{1}{2}),\ \ Q(4, 512)$

b) $P(-2, \frac{1}{72}),\ \ Q(2, 18)$

c) $P(-2, 27),\ \ Q(1, 1)$

a) $P(-1, \frac{1}{2}) \rightarrow f(-1) = \frac{1}{2} = a \cdot b^{-1} \rightarrow \left\{ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} \right.$ Glg.system

$Q(4, 512) \rightarrow f(4) = 512 = a \cdot b^4 \rightarrow \left\{ a = \frac{512}{b^4} \right.$ 2 Glg. 2 Unbekannte (a, b)

Einsetzen: $a = \frac{1}{2} b = \frac{512}{b^4} \quad | : b^4$

$\frac{1}{2} b^5 = 512 \quad | \cdot 2$

$b^5 = 1024 = 2^{10} = (2^2)^5 = 4^5 \rightarrow \underline{b = 4}$

$a = \frac{1}{2} b = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \rightarrow \underline{a = 2}$

$\rightarrow \underline{f(x) = 2 \cdot 4^x}$

b) $f(-2) = \frac{1}{72} \quad ab^{-2} = \frac{1}{72} \rightarrow a = \frac{b^2}{72}$

$f(2) = 18 \quad ab^2 = 18 \rightarrow a = \frac{18}{b^2}$

Gleichsetzen: $\frac{b^2}{72} \overset{!}{=} \frac{18}{b^2} \quad | \cdot b^2$

$\frac{b^4}{72} = 18 \quad | \cdot 72$

$b^4 = 18 \cdot 72$

$b^4 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 3^4 \cdot 2^4 = (3 \cdot 2)^4 = 6^4 \rightarrow \underline{b = 6}$

$a = \frac{18}{b^2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \rightarrow \underline{a = \frac{1}{2}} \rightarrow \underline{f(x) = \frac{1}{2} \cdot 6^x}$

c) $f(-2) = 27 = ab^{-2} \quad \frac{a}{b^2} = 27 \quad a = 27b^2$

$f(1) = 1 = ab \quad a = \frac{1}{b}$

$\frac{1}{b} = 27b^2 \quad | \cdot b$

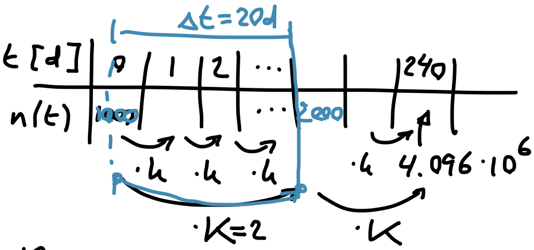
$1 = 27b^3 \quad | : 27$

$b^3 = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$\rightarrow \underline{b = \frac{1}{3}} \rightarrow \underline{a = 3} \quad \underline{f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x}$

Aufgabe 3: Modellrechnungen für die Ausbreitung einer Virus-Pandemie besagen, dass eine anfängliche Zahl von 1'000 Infizierten nach 240 Tagen zu 4.096 Millionen Krankheitsfällen führen würden.

a) Wie gross ist die Verdoppelungszeit Δt?



$$1000 \cdot k^{240} = 4'096'000$$

$$\frac{4'096'000}{1000} = 4096 = 2^{12} = K^{12} \quad (K = 2)$$

Verdoppelung: $K = 2$ $\quad 2^{\bigcirc} = 4096$? $\Rightarrow 2^{12} = 4096$

$240d : 12 = \underline{20d}$

b) Wie lautet die exponentielle Funktion $n(t)$, die die Anzahl Fälle beschreibt? Dabei ist t die Zeit in Tagen.

$a \cdot b^t$

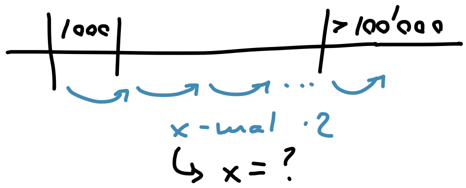
$n(t)$? $\quad \underline{n(t) = \underbrace{n_0}_{a} \cdot \underbrace{2^{\left(\frac{t}{\Delta t}\right)}}_{b}}$

c) Wie viele Infizierte gibt es nach der halben Verdoppelungszeit?

$$n\left(\frac{\Delta t}{2}\right) = n_0 \cdot 2^{\left(\frac{\cancel{\Delta t}/2}{\cancel{\Delta t}}\right)} = n_0 \cdot 2^{1/2} = 1'000 \cdot \sqrt{2} = \underline{1414}$$

d) Nach wie vielen Tagen haben wir die Anzahl von 100'000 Infizierte~~n~~ ganz sicher überschritten?

$1'000 \xrightarrow{\cdot 100} 100'000 \qquad \Delta t = 20d \quad K = 2$



$2^x > 100$

$2^6 = 64 < 100$

$2^7 = 128 > 100$

wenn wir $(\underbrace{7 \cdot \Delta t})$ warten, haben wir $2^7 = 128$-fach, d.h. $128'000 > 100'000$

$7 \cdot 20d = \underline{140d}$ (genau wäre: 133d)

Aufgabe 4: Finde für die folgenden Verläufe der Exponentialfunktionen $f_i(x)$ die Funktionsgleichung. Sie haben alle die folgende Struktur:

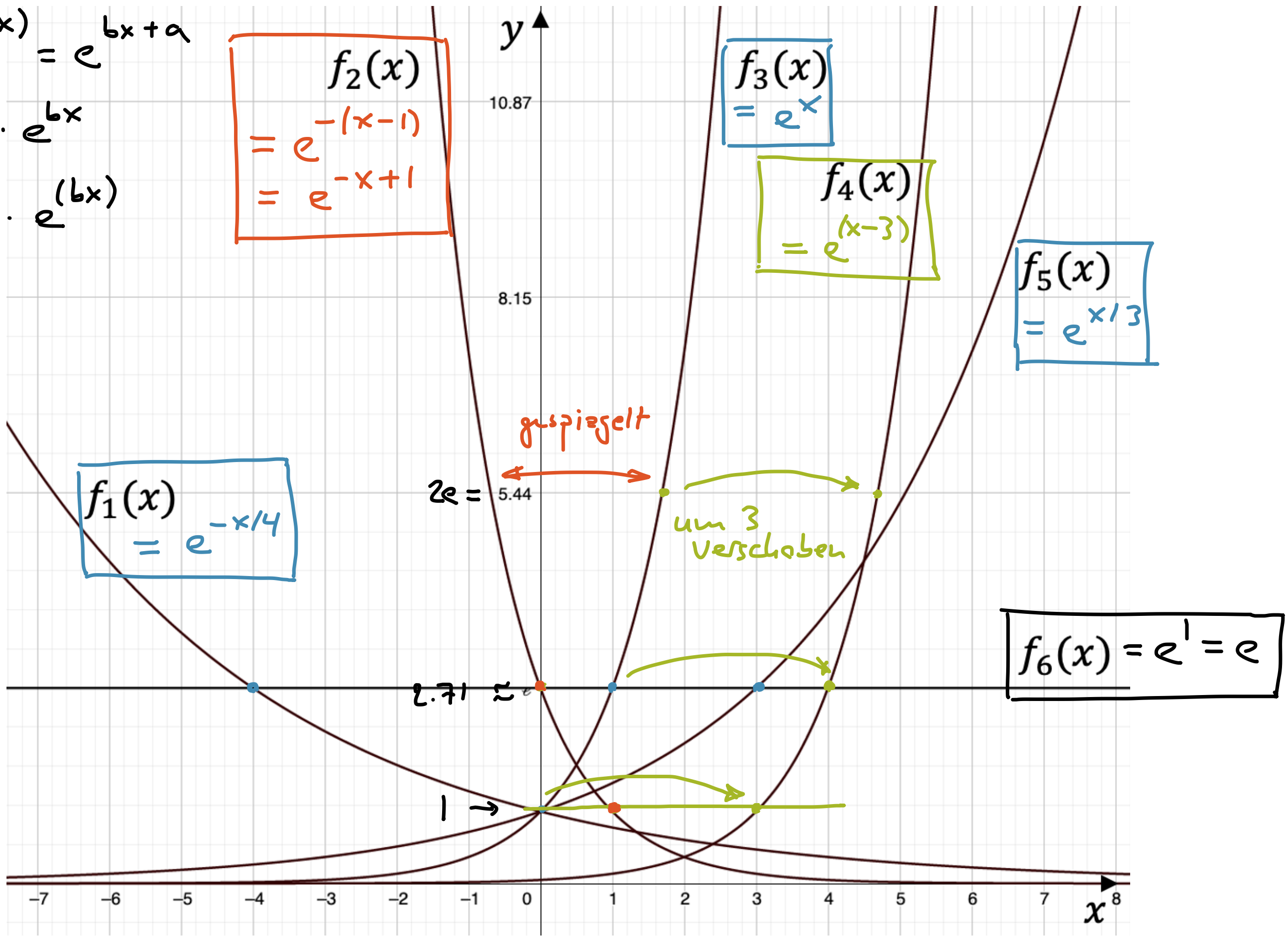
$$f_i(x) = e^{\,g_i(x)}$$

Dabei ist $g_i(x)$ eine lineare Funktion von x.

$f_i(x) = e^{g_i(x)} = e^{bx+a}$

$= \underbrace{(e^a)}_{a'} \cdot e^{bx}$

$a' \cdot e^{(bx)}$



Aufgabe 5: Eine Kapitaleinlage von CHF 100'000 wird zu einem festen jährlichen Zins p angelegt. Nach zwei Jahren hat sich das Kapital bereits um CHF 9'202.50 erhöht.

a) Wie viel beträgt der jährliche Zinssatz p?

$$100'000 \longrightarrow 109'202.50$$

$\cdot k$ $\cdot k$

$$k = (1+p)$$

$$\frac{109'202.50}{100'000} = 1.092025 = k^2$$

$$(1+p)^2 = 1.092025 \quad |\sqrt{}$$

$$1+p = \sqrt{1.092025} \quad |-1$$

$$p = \sqrt{1.092025} - 1$$

$$= 0.045 \Rightarrow \underline{p = 4.5\%}$$

b) Stelle die Gleichung der Exponentialfunktion für das Kapital $k(t)$ (inklusive Zinseszinsen), als Funktion der Zeit t in Jahren auf.

$$\underline{k(t) = k_0 \cdot (1+p)^t} \qquad k_0 = 100'000, \quad p = 0.045$$

c) Wie viel beträgt das Kapital inklusive Zinseszinsen nach 10 Jahren?

$$k(10) = 100'000 \cdot (1+0.045)^{10} = \underline{155'297}$$