Aufgabe 1: Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme nach x und y auf.

a) $\begin{cases} -ax + y &= 2 \\ x - by &= 2 \end{cases}$

$$-ax + y = 2$$
$$ax - aby = 2a$$
$$y - aby = 2 + 2a$$
$$y \cdot (1 - ab) = 2(1+a) \quad |:(1-ab)$$
$$\underline{y = \frac{2(1+a)}{1-ab}}$$

$$x = 2 + by$$
$$= 2 + b \cdot \frac{2(1+a)}{1-ab}$$
$$= \frac{2(1-ab)}{1-ab} + \frac{2b(1+a)}{1-ab}$$
$$= \frac{2 - \cancel{2ab} + 2b + \cancel{2ab}}{1-ab} = \frac{2(1+b)}{1-ab} \longrightarrow \underline{x = \frac{2(1+b)}{1-ab}}$$

b) $\begin{cases} kx - my - ky &= m \\ x + \frac{m+k}{k} \cdot y - \frac{m+2l}{k} &= 0 \end{cases}$

① $$k \cdot x - (m+k) \cdot y = m$$
$$\left(x + \frac{m+k}{k} y = \frac{m+2l}{k} \quad | \cdot (-k) \right)$$
② $$-kx - (m+k) \cdot y = -(m+2l)$$
$$-2(m+k) \cdot y = \cancel{m} - \cancel{m} - 2l \longrightarrow \underline{y} = \frac{\cancel{-2}l}{\cancel{-2}(m+k)} = \underline{\frac{l}{m+k}}$$

$$k \cdot x = m + \cancel{(m+k)} \cdot \frac{l}{\cancel{m+k}} = m + l$$
$$\underline{x = \frac{m+l}{k}}$$

c) $\begin{cases} cx + dy &= c^2 + d^2 \\ cy - dx - c^2 &= d^2 \end{cases} \quad | + c^2$

① $$cx + dy = c^2 + d^2$$
$$-dx + cy = c^2 + d^2 \quad | \cdot \frac{c}{d}$$
② $$-cx + \frac{c^2}{d} \cdot y = \frac{c}{d}(c^2 + d^2)$$
$$\left(d + \frac{c^2}{d}\right) y = \left(1 + \frac{c}{d}\right)(c^2 + d^2)$$

$$y = \frac{\left(1 + \frac{c}{d}\right)(c^2 + d^2)}{\left(d + \frac{c^2}{d}\right)}$$
$$= \frac{(d+c)\cancel{(c^2+d^2)}}{\cancel{(d^2+c^2)}} \rightarrow \underline{y = c + d}$$

$$cx = c^2 + d^2 - d \cdot (c+d)$$
$$= c^2 + \cancel{d^2} - cd - \cancel{d^2}$$
$$cx = c(c-d) \rightarrow \underline{x = c - d}$$

d) $\begin{cases} ax - by &= g \\ bx + ay &= -g \end{cases} \quad | \cdot -\left(\frac{a}{b}\right)$

$$ax - by = g$$
$$-ax - \frac{a^2}{b} y = \frac{ga}{b}$$
$$-\left(b + \frac{a^2}{b}\right) y = g\left(1 + \frac{a}{b}\right)$$
$$\rightarrow y = \frac{\left(1 + \frac{a}{b}\right) \cdot g}{-\left(b + \frac{a^2}{b}\right)} = \frac{b+a}{-(b^2+a^2)} \cdot g$$
$$\underline{y = -\frac{a+b}{a^2+b^2} \cdot g}$$

$$ax = g + by = g - \frac{(a+b) \cdot b}{a^2+b^2} \cdot g$$
$$= \left(1 - \frac{(a+b) \cdot b}{a^2+b^2}\right) \cdot g$$
$$\underline{x = \frac{a^2 + b^2 - (a+b) \cdot b}{(a^2+b^2) \cdot a} \cdot g}$$

Aufgabe 2: Bilde zuerst ein einfacheres Gleichungssystem und löse es anschliessend für x und y.

a) $\begin{cases} x+y-e+f &= 0 \\ x+y &= ex+fy \end{cases}$

$\begin{cases} x+y = e-f \\ (1-e)\cdot x + (1-f)\cdot y = 0 \end{cases}$

① $-(1-e)x - (1-e)\cdot y = -(1-e)(e-f)$

② $(1-e)x + (1-f)\cdot y = 0$

$(\cancel{1}-f-\cancel{1}+e)y = -(1-e)(e-f)$

$\cancel{(e-f)}\, y = -(1-e)\cancel{(e-f)}$

$\underline{y = e-1}$

$x = e-f-y$

$= e-f-(e-1)$

$= \cancel{e}-f-\cancel{e}+1$

$\underline{x = 1-f}$

b) $\begin{cases} (a-2b)\cdot x + ay &= 2a^2-b \quad ① \\ (a+2b)\cdot x + 2ay &= 2a^2+b \quad ② \end{cases}$

①+② $2ax + 3ay = 4a^2$

$2x + 3y = 4a$

①-② $-4bx - ay = -2b \quad |\cdot(-1)$

$4bx + ay = 2b$

$\rightarrow \begin{cases} 2x+3y = 4a \\ 4bx + ay = 2b \quad |:(-2b) \end{cases}$

$2x + 3y = 4a$

$-2x - \frac{a}{2b}y = -1$

$(3-\frac{a}{2b})\cdot y = 4a-1 \quad |\cdot 2b$

$(6b-a)\cdot y = 8ab-2b$

$y = \frac{8ab-2b}{6b-a} = \underline{\frac{2b(4a-1)}{6b-a}}$

$2x = 4a-3y$

$= 4a - \frac{6b(4a-1)}{6b-a} = \frac{4a(6b-a)-6b(4a-1)}{6b-a}$

$2x = \frac{\cancel{24ab}-4a^2-\cancel{24ab}+6b}{6b-a} = \frac{6b-4a^2}{6b-a}$

$\underline{x = \frac{3b-2a^2}{6b-a}}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2p-q} + \frac{y}{2p+q} &= \frac{4p^2+q^2}{(2p+q)(2p-q)} \\ \frac{x}{2p+q} &= 1 - \frac{y}{2p-q} \end{cases}$

① $(2p+q)\cdot x + (2p-q)\cdot y = 4p^2+q^2$

② $(2p-q)\cdot x + (2p+q)\cdot y = \underbrace{(2p+q)(2p-q)}_{4p^2-q^2}$

①+② $4px + 4py = 8p^2 \quad |:4p$

$x + y = 2p$

①-② $2qx - 2qy = 2q^2 \quad |:2q$

$x - y = q$

$\hookrightarrow \begin{cases} x+y = 2p \\ x-y = q \end{cases}$

$x + y = 2p$

$x - y = q$

$2x = 2p+q \rightarrow \underline{x = p+\frac{1}{2}q}$

$y = 2p-x$

$= 2p-(p+\frac{1}{2}q)$

$= p-\frac{1}{2}q \rightarrow \underline{y = p-\frac{1}{2}q}$

Aufgabe 3: Bilde zuerst ein einfacheres Gleichungssystem und löse es anschliessend für x und y.

a) $\begin{cases} y = \frac{y}{x+2y} \\ \frac{y}{2}+1 = \frac{2\left(1+x/y\right)+y}{2x/y} \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} x+2y=1 & ① \\ x-y=2 & ② \end{cases}$

$xy+2y^2 = y \quad |:y$

$x+2y=1$

$\frac{\cancel{y}}{\cancel{2}}\cdot\frac{2x}{\cancel{y}} + \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}y} = 2+\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}y}+y \quad \left|-\frac{2x}{y}\right.$

$x = 2+y \rightarrow x-y=2$

① − ②: $3y=-1 \rightarrow \underline{y=-\frac{1}{3}}$

① + 2·②: $3x=5 \rightarrow \underline{x=\frac{5}{3}}$

b) $\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{x+1}{2x} \\ (x+y)^2 = y^2 \end{cases}$ $\sqrt{\ }$

$2y = x+1 \rightarrow x-2y=-1$

$x+y=y \rightarrow \underline{x=0}$, $0-2y=-1$, $2y=1$, $\underline{y=\frac{1}{2}}$

$x+y=-y$

$x+2y=0 \longrightarrow x+2y=0$

$\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+2y=0 \end{cases}$

$2x=-1$

$\rightarrow \underline{x=-\frac{1}{2}}$

$2y=-x$

$y=-\frac{1}{2}x$

$\underline{y=\frac{1}{4}}$

$\mathbb{L} = (x,y) = \left\{\left(0,\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\right\}$

c) $\begin{cases} \frac{x+2}{x+y} = \frac{2}{5} \\ \frac{x-y}{x+17/5} = \frac{5}{2} \end{cases}$

$x+2 = \frac{2}{5}(x+y)$

$\left(1-\frac{2}{5}\right)x - \frac{2}{5}y = -2$

$x-y = \frac{5}{2}x + \frac{\cancel{5}}{2}\cdot\frac{17}{\cancel{5}}$

$\left(1-\frac{5}{2}\right)x - y = \frac{17}{2}$

$\begin{cases} 3x-2y=-10 \\ -3x-2y=17 \end{cases}$

$-4y = 7 \rightarrow \underline{y=-\frac{7}{4}}$

$6x=-27$

$x = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2}$

$\underline{x=-\frac{9}{2}}$

d) $\begin{cases} 1+\frac{2x}{3+2x} = 3-\frac{y}{y-3} \\ 3+\frac{10xy}{y^2+2xy} = 10-\frac{3xy}{2x^2+xy} \end{cases}$

$3+2x+2x = 9+6x - \frac{y(3+2x)}{y-3}$

$-2x+\frac{(3+2x)}{y-3}\cdot y = 6$

$-\cancel{2xy}+6x+3y+\cancel{2xy} = 6y-18$

$6x-3y=-18 \quad |:6$

① $x-\frac{1}{2}y=-3$

$\begin{cases} 2x-y=-6 & ① \\ x+y=0 & ② \end{cases}$

① − 2②: $-3y=-6 \rightarrow \underline{y=2}$

① + ②: $3x=-6 \rightarrow \underline{x=-2}$

$3y^2+6xy+10xy = 10y^2+20xy - \frac{3xy(y^2+2xy)}{2x^2+xy}$

$-7y^2-4xy = -\frac{3\cancel{x}y(y^2+2xy)}{2x^{\cancel{2}}+\cancel{x}y}$

$-7y^2(\cancel{2x+y})-4xy(\cancel{2x+y}) = -3y^2(\cancel{y+2x})$

$-4y^2-4xy=0 \quad |:y$

$-4y-4x=0 \longrightarrow x+y=0$ ②

$y=0 \rightarrow x=0$

$(x,y)\in\underline{\mathbb{L}=\{(-2,2),(0,0)\}}$

Aufgabe 4: Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme für zwei bzw. drei Unbekannte, indem du eine geeignete Substitution anwendest und finde dann die Lösungen für x, y und z.

a) $$\begin{cases} \frac{1}{2x} + \frac{1}{y} &= 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= 0 \end{cases}$$

$a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y}$

$\frac{1}{2}a + b = 3 \rightarrow \begin{cases} a + 2b = 6 & ① \\ a - b = 0 & ② \end{cases}$

① − ② $\quad 2b + b = 6 \rightarrow 3b = 6 \rightarrow b = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = 2 \rightarrow \underline{y = \frac{1}{2}}$

$a = b = 2 \rightarrow \frac{1}{x} = 2 \rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}}$

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

b) $$\begin{cases} \tan(x) - 2\sin(y) &= 0 \\ 4\sin(x) + 2\sin(y)\cos(x) &= 5\cos(x) \end{cases}$$

$|:\cos(x) \rightarrow 4\tan(x) + 2\sin(y) = 5$

$a = \tan(x)$, $b = \sin(y)$

$\begin{cases} a - 2b = 0 & ① \\ 4a + 2b = 5 & ② \end{cases}$

①+② $\quad 5a = 5 \rightarrow a = 1 \rightarrow \tan(x) = 1$

$\hookrightarrow \underline{x = \frac{\pi}{4}}$

$2b = a \rightarrow b = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$

$\sin(y) = \frac{1}{2} \rightarrow \underline{y = \frac{\pi}{6}}$

c) $$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{4}{y^2} - \frac{3(z^2+1)}{2z} &= 16 \\ 1 - \frac{2x}{y^2} + x \cdot \frac{z^2+1}{z} &= -\frac{9}{2}x \\ \frac{z}{x} + \frac{2z}{y^2} + \frac{5}{2}z^2 &= \frac{1}{2}(3z-5) \end{cases}$$

$a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{y^2}$, $c = \frac{z^2+1}{z}$

① $\underline{2a + 4b - \frac{3}{2}c = 16}$

② $1 - \frac{2x}{y^2} + x \cdot \frac{z^2+1}{z} = -\frac{9}{2}x \quad |:x$

$\frac{1}{x} - \frac{2}{y^2} + \frac{z^2+1}{z} = -\frac{9}{2}$

$a - 2b + c = -\frac{9}{2} \quad |\cdot(-2)$

② $\underline{-2a + 4b - 2c = 9}$

③ $\frac{z}{x} + \frac{2z}{y^2} + \frac{5}{2}z^2 = \frac{3}{2}z - \frac{5}{2}$

$\frac{z}{x} + \frac{2z}{y^2} + \underline{\frac{5}{2}(z^2+1) \cancel{-\frac{5}{2}}} = \frac{3}{2}z \cancel{-\frac{5}{2}} \quad |:z$

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{z^2+1}{z} = \frac{3}{2}$

$a + 2b + \frac{5}{2}c = \frac{3}{2} \quad |\cdot 2$

③ $\underline{2a + 4b + 5c = 3}$

$\begin{cases} 2a + 4b - \frac{3}{2}c = 16 & ① \\ -2a + 4b - 2c = 9 & ② \\ 2a + 4b + 5c = 3 & ③ \end{cases}$

①+② $\quad 8b - (\frac{3}{2} + 2)c = 25$

$8b - \frac{7}{2}c = 25 \quad Ⓐ$

②+③ $\quad 8b + 3c = 12 \quad Ⓑ$

Ⓐ−Ⓑ $\quad -\frac{7}{2}c - 3c = 25 - 12 = 13$

$-\frac{13}{2}c = 13 \rightarrow \underline{c = -2}$

$8b = 12 - 3c = 12 - 3\cdot(-2) = 18$

$\underline{b} = \frac{18}{8} = \underline{\frac{9}{4}}$

$\rightarrow 2a = 3 - 4b - 5c = 3 - 9 + 10 = 4$

$\hookrightarrow \underline{a = 2}$

$a = \frac{1}{x} = 2 \rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

$\boxed{z = -1}$

$b = \frac{1}{y^2} = \frac{9}{4} = (\pm\frac{3}{2})^2 \rightarrow \boxed{y = \pm\frac{2}{3}}$

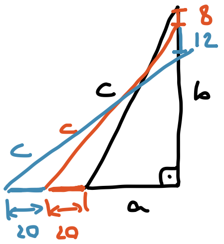
$c = \frac{z^2+1}{z} = -2 \quad z^2 + 1 = -2z \rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0$

$(z+1)^2 = 0$

Aufgabe 5: Ein rechtwinkliges Dreieck hat eine kurze Kathete a und eine lange Kathete b. Wird a um 20 mm verlängert, verkürzt sich b um 8 mm. Die Hypotenuse c soll ihre Länge immer beibehalten. Verlängern wir a nochmals um 20 mm, so verkürzt sich b dieses Mal um weitere 12 mm.

Wie lange waren a und b zu Beginn?

Tipp: Stelle zuerst drei Gleichungen auf und bilde aus je zwei Gleichungen jeweils eine lineare Gleichung. Damit erhältst Du ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten.



$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 & (1) \\ (a+20)^2 + (b-8)^2 = c^2 & (2) \\ (a+40)^2 + (b-20)^2 = c^2 & (3) \end{cases}$$

$$a^2 + b^2 \overset{!}{=} (a+20)^2 + (b-8)^2$$

$$\cancel{a^2} + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} + 40a + 400 + \cancel{b^2} - 16b + 64 \qquad | -a^2 - b^2$$

$$40a - 16b = -464 \qquad | : 8$$

$$(1),(2) \longrightarrow \quad (a) \quad 5a - 2b = -58$$

$$\cancel{a^2} + \cancel{b^2} = \cancel{a^2} + 80a + 1600 + \cancel{b^2} - 40b + 400$$

$$8\cancel{0}a - 4\cancel{0}b = -200\cancel{0}$$

$$(1),(3) \longrightarrow \quad (b) \quad 2a - b = -50$$

$$(a)-2(b) \quad 5a - 4a = -58 + 100$$

$$\underline{a = 42\,\text{mm}}$$

$$\begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} \begin{cases} 5a - 2b = -58 \\ 2a - b = -50 \end{cases}$$

$$b = 2a + 50 = 84 + 50 = 134 \rightarrow \underline{b = 134\,\text{mm}}$$

Aufgabe 6: Auf einer Eisenbahnstrecke steht eine Baustelle. Schnellzüge fahren normalerweise mit 120 km/h. Auf der Baustelle müssen sie aber mit 60 km/h fahren, so dass das Abfahren der ganzen Strecke 1 Stunde und 5 Minuten dauert. Güterzüge sind üblicherweise mit 80 km/h unterwegs und passieren die Baustelle ebenfalls mit 60 km/h. Sie legen die ganze Strecke in 1 Stunde und 32.5 Minuten zurück.

Wie lange ist die $\underbrace{\text{ganze Eisenbahnstrecke}}_{s}$ und wie lange ist die $\underbrace{\text{Baustelle}}_{b}$?

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Schnellzug:} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{s-b}{120} + \frac{b}{60} = \frac{65}{60} \rightarrow \frac{1}{2}(s-b) + b = 65 \\ \frac{s-b}{80} + \frac{b}{60} = \frac{92.5}{60} \rightarrow \frac{3\cancel{6}}{4\cancel{8}}(s-b) + b = 92.5 \end{array} \right. \\ \text{Güterzug:} & \end{array}$$

$$s - b + 2b = 130 \rightarrow s + b = 130$$

$$\frac{3}{4}s - \frac{3}{4}b + b = 92.5 \rightarrow \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}b = 92.5 \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} s + b = 130 & (1) \\ 3s + b = 370 & (2) \end{array} \right.$$

$$(1) - (2) \quad -2s = 130 - 370 = -240 \rightarrow \underline{s = 120\,\text{km}}$$

$$b = 130 - s = 130 - 120 = 10 \rightarrow \underline{b = 10\,\text{km}}$$