Aufgabe 1: Die Gerade g verläuft durch den Punkt $A(4, 7)$ und ist parallel zur Geraden h.

$$h: \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$$

a) Stelle die Parameterform der Geraden g auf.

$$\underline{g: \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}}$$

b) Finde den Punkt P, wo die Gerade g die $y-$Achse kreuzt.

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \frac{41}{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\41/3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4-3s = 0+0 \\ 7+5s = 0+t \end{cases} \to \begin{matrix} 3s = 4 \to s = \frac{4}{3} \\ 7 + \frac{5\cdot 4}{3} = t = \frac{21}{3} + \frac{20}{3} = \frac{41}{3} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{P\left(0, \frac{41}{3}\right)}$$

c) Zeige, dass der Punkt A nicht auf h liegt.

$A(4,7)$

$$h: \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$$ es gibt kein λ dafür

$$\begin{cases} 1-3\lambda = 4 \to 3\lambda = -3 \to \lambda = -1 \\ 2+5\lambda = 7 \to 5\lambda = 5 \to \lambda = +1 \end{cases} \lightning$$

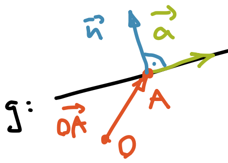
d) Finde die Normalform der Geraden g.

$$g: \underbrace{\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}}_{\vec{OA}} + \lambda\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}}_{\vec{a}}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}5\\+3\end{pmatrix}$$

überprüfen: $\vec{a}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} = (-3)\cdot 5 + 5\cdot 3 = 0$

$\vec{a} \perp \vec{n}$



$$\underline{g: 5\cdot(x-4) + 3\cdot(y-7) = 0}$$

Aufgabe 2: Bestimme für die folgenden Geradenpaare g und h jeweils den Schnittpunkt (falls er existiert) und den Schnittwinkel φ.

a) $g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$$

$x: \quad 0 - s = -1 + t$

$y: \quad 1 + s = 1 + 2t$

$1 + 0 = 0 + 3t \rightarrow \underline{t = \frac{1}{3}}$

$-s = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \rightarrow \underline{s = \frac{2}{3}}$

Überprüfung der 3. Gleichung: $\quad z: \quad 3 + s = -1 + 6t$

$$3 + \frac{2}{3} \overset{?}{=} -1 + 6\cdot\frac{1}{3}$$

$$\frac{11}{3} \overset{?}{=} \frac{3}{3} \quad ↯ \quad \Rightarrow \text{kein Schnittpunkt!}$$

b) $g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad h: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\7\\11\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}0\\7\\11\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$x: \quad 2 + 4s = t$

$y: \quad 1 = 7 + t \rightarrow \underline{t = -6}$

$2 + 4s = -6 \rightarrow 4s = -8 \rightarrow \underline{s = -2}$

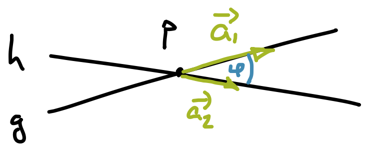
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-8\\1\\7-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\1\\5\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{P(-6, 1, 5)}$

Überprüfung 3. Glg:

$z: \quad 7 + s = 11 + t$

$\underbrace{7 - 2}_{5} \overset{?}{=} \underbrace{11 - 6}_{5} \quad ✓ \quad \Rightarrow$ wir haben einen Schnittpunkt



$$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = |\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|\cdot\sin\varphi \rightarrow \sin\varphi = \frac{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}$$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix} \rightarrow |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2}, \quad |\vec{a}_1| = \sqrt{4^2+1^2}, \quad |\vec{a}_2| = \sqrt{3}$$

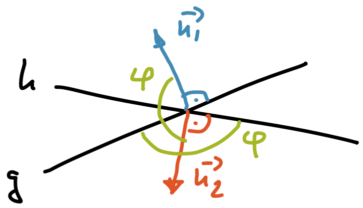
$$\rightarrow \sin\varphi = \frac{\sqrt{1+9+16}}{\sqrt{17}\sqrt{3}} \rightarrow \underline{\varphi = 45.6°}$$

c) $g:\ 0\cdot(x-2)-(y-1)=0, \qquad h:\ -(x-2)+(y-1)=0$

$$g:\ -y+1=0 \longrightarrow \underline{y=1}$$
$$h:\ -x+2+y-1=0 \qquad \hookrightarrow -x+2+\cancel{1}-\cancel{1}=0 \longrightarrow \underline{x=2} \Bigg\}\ \underline{P(2,1)}$$

$$g:\ \vec{n}_1=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \qquad \sin\varphi=\frac{|\vec{n}_1\times\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}} \longrightarrow \underline{\varphi=45^\circ}$$
$$h:\ \vec{n}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\longrightarrow|\vec{n}_1\times\vec{n}_2|=1$$



d) $g:\ 2\cdot(x-1)+2\cdot(y-2)=0, \qquad h:\ (x-3)-(y-0)=0$

$$g:\ 2x-2+2y-4=0$$
$$(-2)\cdot h:\ -2x+\cancel{3}6+2y+0=0$$
$$\cancel{4}+4y-\cancel{4}=0 \longrightarrow \underline{y=0}$$

$$2x-\cancel{2}+\cancel{2}\cancel{0}-\cancel{4}=0$$
$$2x-6=0 \longrightarrow 2x=6 \longrightarrow \underline{x=3}$$
$$\longrightarrow \underline{P(3,0)}$$

$$\vec{n}_1=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|\cdot\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$
$$\vec{n}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad \cos\varphi=\frac{2\cdot1+2\cdot(-1)}{\dots}=0 \longrightarrow \underline{\varphi=90^\circ}$$

e) $g:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{7}\\9\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}7\\-1\\-7\end{pmatrix}, \qquad h:\ z-$Achse $\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-1\\1/7\\9\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}7\\-1\\-7\end{pmatrix}\overset{!}{=}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

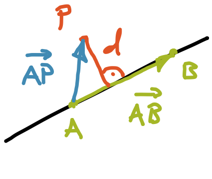
$$x:\ -1+7s=0 \longrightarrow 7s=1 \longrightarrow \underline{s=\tfrac{1}{7}}$$
$$\left(y:\ \tfrac{1}{7}-s=0\right)$$
$$z:\ 9-7s=t=9-7\cdot\tfrac{1}{7}=9-1=8 \longrightarrow \underline{t=8} \longrightarrow \underline{P(0,0,8)}$$

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\begin{pmatrix}7\\-1\\-7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-7\\0\end{pmatrix} \qquad |\vec{a}_1\times\vec{a}_2|=\sqrt{1^2+7^2}=\sqrt{50}$$

$$|\vec{a}_1|=\underbrace{\sqrt{7^2+1^2+7^2}}_{\sqrt{99}=3\sqrt{11}},\ |\vec{a}_2|=1 \qquad \sin\varphi=\frac{\sqrt{50}}{3\sqrt{11}} \longrightarrow \underline{\varphi=45.3^\circ}$$

Aufgabe 3: Bestimme jeweils den Abstand der Punkte oder Geraden zu g.

$$d = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AP}|}{|\vec{AB}|}$$



$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{A(2,0,-3)} + \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{AB}} \rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

a) $O(0,0,0)$

$$\vec{AO} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AB} \times \vec{AO} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AO}| = \sqrt{6^2+3^2+4^2} = \sqrt{36+9+16} = \sqrt{61}$$

$$d = \frac{\sqrt{61}}{\sqrt{5}} = \underline{\sqrt{\frac{61}{5}}}$$

b) $P(10,10,10)$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 10-2 \\ 10-0 \\ 10+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AB} \times \vec{AP} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AP}| = \sqrt{26^2+13^2+6^2} = \sqrt{881}$$

$$d = \frac{\sqrt{881}}{\sqrt{5}} = \underline{\sqrt{\frac{881}{5}}}$$

c) $Q(-1,-6,-3)$

$$\vec{AQ} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -6-0 \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{AB} \times \vec{AQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\vec{AB} \parallel \vec{AQ}$ $\quad |\vec{AB} \times \vec{AQ}| = |\vec{0}| = 0$

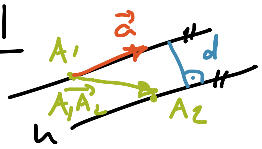
$$d = \frac{0}{\sqrt{5}} = \underline{0} \qquad Q \in g$$

d) $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}$

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{AB}} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 2-s=0 \rightarrow s=2 \\ 0-2s \neq 0 \\ \Rightarrow g \neq h \end{array}$$

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{AB}$ (kollinear) $\Rightarrow h \parallel g$

$$d = \frac{|\vec{a} \times \vec{A_1A_2}|}{|\vec{a}|}$$



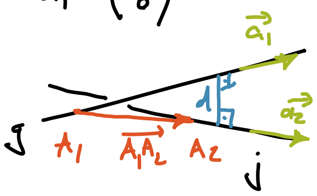
$$A_1(2,0,-3), \quad A_2(0,0,0) \rightarrow \vec{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-0 \\ 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a} \times \vec{A_1A_2}| = \sqrt{12^2+6^2+8^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2+4^2} \rightarrow d = \frac{\sqrt{12^2+6^2+8^2}}{\sqrt{2^2+4^2}} = \underline{\frac{\sqrt{305}}{5}}$$

e) $j: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a_2}}$

$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ nicht parallel!



$$d = \frac{|[\vec{a_1}\ \vec{a_2}\ \vec{A_1A_2}]|}{|\vec{a_1} \times \vec{a_2}|}$$

$A_1(2,0,-3)$ auf g

$A_2(1,2,3)$ auf j

$$\vec{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-0 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a_2} \times \vec{A_1A_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a_1} \cdot (\vec{a_2} \times \vec{A_1A_2}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-2) + (-2)\cdot 5 + 0 = 2 - 10 = -8$$

$\hookrightarrow [\vec{a_1}\ \vec{a_2}\ \vec{A_1A_2}] = -8$

$$\vec{a_1} \times \vec{a_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{a_1} \times \vec{a_2}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$$

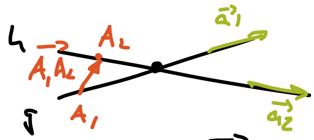
$$d = \frac{|-8|}{3} = \underline{\frac{8}{3}}$$

Aufgabe 4: Untersuche die beiden Geraden g und h darauf, ob sie sich schneiden, parallel oder windschief zu einander sind.

a) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2}$

nicht parallel

$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0}$



$$\left.\begin{matrix} A_1(7,8,0) \\ A_2(4,3,3) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 4-7 \\ 3-8 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_2 \times \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_1 \cdot \left(\vec{a}_2 \times \overrightarrow{A_1A_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix} = \underbrace{1 \cdot 15 + 1 \cdot (-15)}_{=0} + 0 \cdot \cancel{(-10)} = 0$$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{A_1A_2}$ komplanar

$\rightarrow [\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \overrightarrow{A_1A_2}] = 0$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Schnittpunkt}}$

$[\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \overrightarrow{A_1A_2}] \neq 0$

$\rightarrow$ windschief

b) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2}$

$-3 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \Rightarrow \vec{a}_1 \parallel a_2$ $\boxed{\text{parallel}}$ $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{0})$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ x: $1 \overset{?}{=} 0$ ↯

$\Rightarrow$ Es gibt kein t, so dass $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit h erreicht wird $\rightarrow$ g und h sind nicht identisch

c) $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_1}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{a}_2}$

$\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind nicht parallel!

$(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0})$

$$[\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \; \overrightarrow{A_1A_2}] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \cancel{2} + (-1)\cdot(-1) + 2 \cdot 1$$

$$= 1 + 2 = 3 \neq 0$$

$$\left.\begin{matrix} A_1(1,-1,2) \\ A_2(0,0,5) \end{matrix}\right\} \overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0+1 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

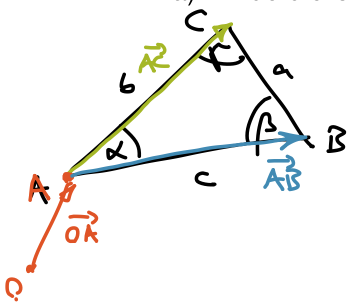
$\Rightarrow$ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\overrightarrow{A_1A_2}$ sind nicht komplanar

$\Rightarrow$ kein Schnittpunkt

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{windschief}}$

Aufgabe 5: Ein Dreieck im Raum hat die Ecken $A(0,0,-2)$, $B(2,5,0)$ und $C(7,3,-2)$.

a) Finde die Geradengleichungen in Parameterform für die Seiten b und c



$$b:\ \vec{OA} + s\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}7\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$c:\ \vec{OA} + t\cdot\vec{AB} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix}7-0\\3-0\\-2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}2-0\\5-0\\0+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}$$

b) Bestimme den Winkel α

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = |\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot\cos\alpha \longrightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{29}{\sqrt{33}\cdot\sqrt{58}}$$

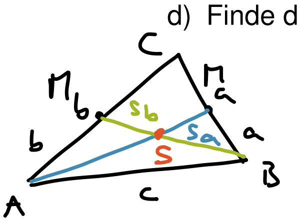
$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\3\\0\end{pmatrix} = 2\cdot 7 + 5\cdot 3 = 14+15 = 29 \qquad \hookrightarrow \alpha = 48.5°$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2+5^2+2^2} = \sqrt{33} \qquad |\vec{AC}| = \sqrt{7^2+3^2} = \sqrt{58}$$

c) Finde einen Normalvektor $\vec{n}$, der senkrecht auf der Ebene des Dreiecks steht.

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix}2\\5\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\14\\-29\end{pmatrix} = \vec{n}$$

d) Finde die Gleichungen in Parameterform der beiden Seitenhalbierenden s_a und s_b.



$$\vec{OM_b} = \vec{OA} + \tfrac{1}{2}\vec{AC} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.5\\1.5\\-2\end{pmatrix} \to M_b(3.5,\ 1.5,\ -2)$$

$$\vec{OM_a} = \vec{OB} + \tfrac{1}{2}\vec{BC} = \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4.5\\4\\-1\end{pmatrix} \to M_a(4.5,\ 4,\ -1)$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix}7-2\\3-5\\-2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\-2\end{pmatrix} \qquad s_a:\ \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4.5\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{AM_a} = \begin{pmatrix}4.5-0\\4-0\\-1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4.5\\4\\1\end{pmatrix} \qquad s_b:\ \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1.5\\-3.5\\-2\end{pmatrix}$$

$$\vec{BM_b} = \begin{pmatrix}3.5-2\\1.5-5\\-2-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.5\\-3.5\\-2\end{pmatrix}$$

e) Bestimme den Schwerpunkt des Dreiecks, indem Du den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden findest.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4.5\\4\\1\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1.5\\-3.5\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}9/2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\8/3\\-4/3\end{pmatrix} \quad \hookrightarrow S\left(3,\ \tfrac{8}{3},\ -\tfrac{4}{3}\right)$$

$x:\quad 4.5s = 2 + 1.5t$

$y:\quad 4s = 5 - 3.5t$

$9s = 4 + 3t$

$8s = 10 - 7t$

$72s = 32 + 24t$

$-72s = -90 + 63t$

$0 = -58 + 87t \to t = \frac{58}{87} = \frac{2}{3}$

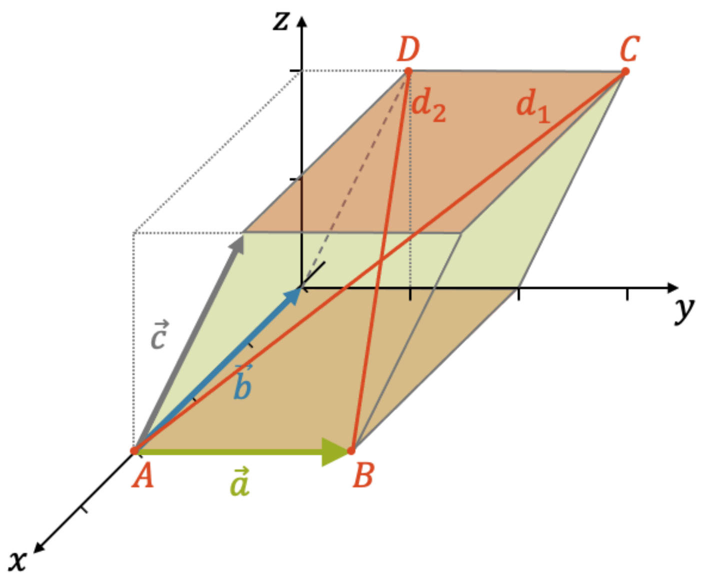
$9s = 4 + 3\cdot\frac{2}{3} = 6$

$s = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Überprüfung der 3. Glg. s, t

$$z:\ -2 + \tfrac{2}{3}\cdot 1 = 0 + \tfrac{2}{3}\cdot(-2) \longrightarrow \underbrace{-2}_{-\frac{6}{3}} + \tfrac{2}{3} \overset{?}{=} -\tfrac{4}{3} \quad ✓ \text{ ist erfüllt}$$

Aufgabe 6: Gegeben ist das folgende Prisma:



a) Finde die Geradengleichungen in Parameterform für die beiden eingezeichneten Raumdiagonalen d_1 und d_2.

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 1-2 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{d_1: \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{d_2: \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

b) Bestimme den Schnittpunkt P und Schnittwinkel φ der beiden Raumdiagonalen.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x: \quad \cancel{3} - 3s = \cancel{3} - 3t \quad \longrightarrow \quad s = t$

$y: \quad 3s = 2 - t \quad \longrightarrow \quad 3s = 2 - s \quad | +s$

$4s = 2 \quad | :4$

$\underline{s = \frac{1}{2}} \quad \longrightarrow \quad \underline{t = \frac{1}{2}}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow \underline{P\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)}$

Überprüfung 3. Glg:

$z: \quad 2s = 2t \quad ✓ \quad \rightarrow$ Schnittpunkt

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-3)\cdot(-3) + 3\cdot(-1) + 2\cdot 2 = 9 - 3 + 4 = 10$$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2+3^2+2^2} = \sqrt{22} \qquad |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{3^2+1^2+2^2} = \sqrt{14} \qquad \cos\varphi = \frac{10}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{14}} \rightarrow \underline{\varphi = 55.3°}$