**Aufgabe 1:** Berechne die folgenden Vektorprodukte.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix}11\\-5\\-2\end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}$$

a) $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}-10\\6\\5\end{pmatrix}}$$

$$\begin{matrix}1 & \quad & 3\\ 0 & \quad & 5\end{matrix}$$

b) $\vec{e} \times (\vec{b} \times \vec{d})$

$$\vec{b} \times \vec{d} = \begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}11\\-5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10\\6\\-70\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}3 & \quad & 11\\ 5 & \quad & -5\end{matrix}$$

$$\vec{e} \times (\vec{b} \times \vec{d}) = \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-10\\6\\-70\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}0\\490\\42\end{pmatrix}}$$

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{d})$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}1+3\\0+5\\2+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix}2-11\\2-(-5)\\-2-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\7\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-9\\7\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\-18\\28+45\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}-14\\-18\\73\end{pmatrix}}$$

d) $\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\vec{f}} \times \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\vec{f}} = \underline{\vec{0}}$

e) $(\vec{a} \times \vec{e}) + (\vec{d} \times \vec{c})$

$$\vec{a} \times \vec{e} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\14\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{d} \times \vec{c} = \begin{pmatrix}11\\-5\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10-(-4)\\-4-(-22)\\22-(-10)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\18\\32\end{pmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{e}) + (\vec{d} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix}0+14\\14+18\\0+32\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}14\\32\\32\end{pmatrix}}$$

**Aufgabe 2:** Gegeben sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Berechne das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

$$\vec{c} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 5\cdot 4 - (-20) \\ 2 - 12 \\ 30 - (-5) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 35 \end{pmatrix}}$$

b) Zeige, dass $\vec{c}$ sowohl auf $\vec{a}$, wie auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 40 \cdot 3 + (-10) \cdot 5 + 35 \cdot (-2)$$
$$= 120 - 50 - 70 = 0 \rightarrow \vec{c} \perp \vec{a}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ -10 \\ 35 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix} = 40 \cdot (-1) + (-10) \cdot 10 + 35 \cdot 4$$
$$= -40 - 100 + 140 = 0 \rightarrow \vec{c} \perp \vec{b}$$

c) Zeige, dass das Vektorprodukt immer senkrecht auf dem ersten Vektor des Produkts steht, indem du die beiden folgenden allgemeinen Vektoren benutzt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \cdot (a_y b_z - a_z b_y) + a_y \cdot (a_z b_x - a_x b_z) + a_z \cdot (a_x b_y - a_y b_x)$$

$$= \underline{a_x a_y b_z} - \underline{a_x a_z b_y} + \underline{a_y a_z b_x} - \underline{a_x a_y b_z} + \underline{a_x a_z b_y} - \underline{a_y a_z b_x}$$

$= 0$ $\quad$ $= 0$ $\quad$ $= 0$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \quad \forall \vec{a}, \vec{c}$$

**Aufgabe 3:** Benutze die algebraischen Eigenschaften des Vektorprodukts für die folgenden Aufgaben und löse sie <u>ohne</u> Komponentenschreibweise.

a) $(\vec{a}+\vec{b}) \times (3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{a})$ $= (\vec{a}+\vec{b}) \times (2\vec{a}+2\vec{b}) = (\vec{a}+\vec{b}) \times 2(\vec{a}+\vec{b})$

$= 2\cdot\left[(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}+\vec{b})\right] = \underline{\vec{0}}$

$(\vec{a}+\vec{b}) \times (2\vec{a}+2\vec{b}) = \vec{a} \times (2\vec{a}+2\vec{b}) + \vec{b} \times (2\vec{a}+2\vec{b})$

$= \underbrace{\cancel{\vec{a}\times 2\vec{a}}}_{=\vec{0}} + \vec{a}\times 2\vec{b} + \vec{b}\times 2\vec{a} + \underbrace{\cancel{\vec{b}\times 2\vec{b}}}_{=\vec{0}}$

$= 2\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) + 2\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$

$= 2\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) - 2\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \underline{\vec{0}}$

b) $(2\vec{a}-\vec{b}) \times (\vec{a}-2\vec{b})$ $= 2\vec{a}\times(\vec{a}-2\vec{b}) - \vec{b}\times(\vec{a}-2\vec{b})$

$= \underbrace{\cancel{2\vec{a}\times\vec{a}}}_{=\vec{0}} - 2\vec{a}\times 2\vec{b} - \vec{b}\times\vec{a} + \underbrace{\cancel{\vec{b}\times 2\vec{b}}}_{=\vec{0}}$

$= (-4)\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{b})$

$= \underline{(-3)\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}$

c) $(2\vec{c}\times\vec{a}) + (2\vec{a}\times\vec{c})$

$2\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) + 2(\vec{a}\times\vec{c}) = (-2)\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) + 2\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = \underline{\vec{0}}$

kollinear

d) $\vec{u} \times \left[\underbrace{(\vec{v}+\vec{w}) \times 2(\vec{v}+\vec{w})}_{\vec{0}}\right] = \underline{\vec{0}}$

**Aufgabe 4:** Gegeben sind die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks im Raum:

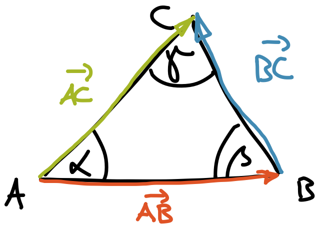
$$A(2,3,5), \quad B(-1,-1,0), \quad C(10,3,-4)$$

a) Berechne das Vektorprodukt $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -1-3 \\ 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 10-2 \\ 3-3 \\ -4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36-0 \\ -40-27 \\ 0-(-32) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 36 \\ -67 \\ 32 \end{pmatrix}}$$

b) Berechne die Winkel $\alpha$ und $\beta$.




$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 36 \\ -67 \\ 32 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36^2+67^2+32^2} \qquad |\vec{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{8^2+9^2}$$

$$|\vec{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+4^2+5^2}$$

$$\hookrightarrow \sin\alpha = 0.969 \rightarrow \alpha = \arcsin(0.969)$$

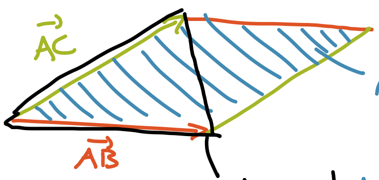
$$\underline{\alpha = 75.7^\circ}$$

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sin\beta = \frac{|\vec{BA} \times \vec{BC}|}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} \qquad \vec{BA} \times \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16-20 \\ 55+12 \\ 12-44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ 67 \\ -32 \end{pmatrix}$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{36^2+67^2+32^2}}{\sqrt{3^2+4^2+5^2} \cdot \sqrt{11^2+4^2+4^2}} = 0.11118 \rightarrow \underline{\beta = 6.38^\circ}$$

c) Berechne die Fläche des Dreiecks.

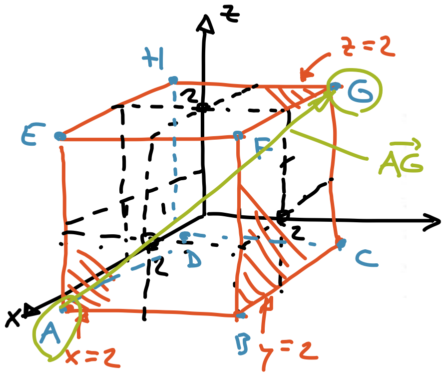



$$A_{\square} = |\vec{AB} \times \vec{AC}| =$$

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} A_{\square} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{36^2+67^2+32^2} = \underline{41.26}$$

**Aufgabe 5:** Wir haben einen gerade stehenden Würfel mit Schwerpunkt im Koordinatenursprung und Seitenlänge $s = 4$.

a) Zeichne den Würfel im dreidimensionalen Koordinatensystem.



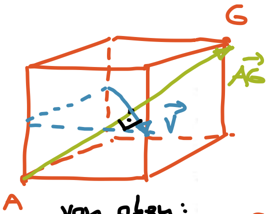

b) Beschrifte die Ecken $A$ bis $H$ und bestimme deren Koordinaten.

$A(2,-2,-2)$ $E(2,-2,2)$
$B(2,2,-2)$ $F(2,2,2)$
$C(-2,2,-2)$ $G(-2,2,2)$
$D(-2,-2,-2)$ $H(-2,-2,2)$

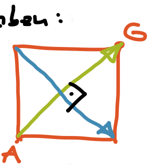
c) Welchen Zwischenwinkel hat die Raumdiagonale durch die Ecke $(2,-2,-2)$ mit dem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}$?

Raumdiagonale → $\overrightarrow{AG}$; Ecke $(2,-2,-2)$ $= A$

$\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}-2-2\\2-(-2)\\2-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix}$




von oben:

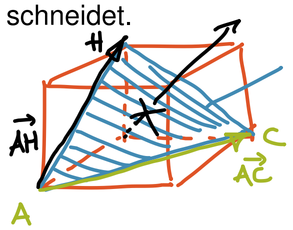



$$\overrightarrow{AG} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\cdot 0 - 4\cdot 4\\4\cdot 4-(-4)\cdot 0\\(-4)\cdot 4 - 4\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-16\\16-0\\-16-16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\16\\-32\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AG}\times\vec{v}| = |\overrightarrow{AG}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\varphi \longrightarrow \sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{AG}\times\vec{v}|}{|\overrightarrow{AG}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{16^2+16^2+32^2}}{\sqrt{4^2+4^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+4^2}}$$

$$\sin\varphi = 1 \longrightarrow \underline{\varphi = 90^\circ}$$

d) Berechne die Fläche der Schnittebene durch den Würfel, die drei Seitenflächen diagonal schneidet.




$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AH}\right|$$

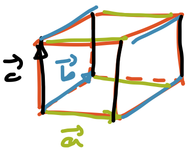
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\16\\16\end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AH}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2+16^2+16^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 16^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 16 = \underline{8\sqrt{3}}$$

e) Berechne das Volumen des Würfels mit Hilfe des Spatprodukts.

$$V = s^3 \underset{s=4}{=} 4^3 = 64$$




$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = V$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$$

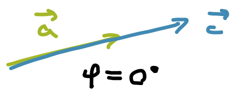
$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

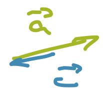
$$\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\16\\0\end{pmatrix} = \underline{64}$$

**Aufgabe 6:** Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

a) Zeige, dass $\vec{a}$ und $\vec{c}$ kollinear sind.



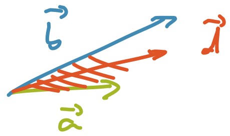

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \qquad (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}) \qquad |\vec{a} \times \vec{c}| = 0 = \underset{\neq 0}{|\vec{a}|} \cdot \underset{\neq 0}{|\vec{c}|} \cdot \underbrace{\sin\varphi}_{=0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 - (-3) \cdot (-2) \\ (-3) \cdot (-4) - 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \varphi = 0° \text{ oder } 180°$$

$\hookrightarrow$ sind $\vec{a}$ und $\vec{c}$ kollinear

b) Zeige, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{d}$ komplanar sind.




$$\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} \qquad \text{(Linearkombination)}$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}\,] = V_{Spat} = 0 \qquad (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{d} = \vec{0})$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}\,] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 17 + (-3) \cdot 5$$
$$= -2 + 17 - 15 = 0 \checkmark$$

$\Rightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{d}$ sind komplanar