Aufgabe 1: Löse die folgenden linearen Gleichungssystem durch Gleichsetzen.

a) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 4x - y = -7 \end{cases}$ $\rightarrow$ $4x + 8y = 20$ $\rightarrow$ $4x = 20 - 8y$

$\rightarrow$ $4x = y - 7$

$20 - 8y = y - 7 \quad | +8y +7$

$27 = 9y \quad | :9$

$\underline{y = 3}$

$x + 2y = 5 \rightarrow x = 5 - 2y = 5 - 2 \cdot 3 = -1$

$\rightarrow \underline{x = -1}$

b) $\begin{cases} 3a - b = -2 \\ -6a + \frac{1}{2}b = -8 \end{cases}$ $\rightarrow 3a = b - 2 \rightarrow 6a = 2b - 4$

$\rightarrow 6a = 8 + \frac{1}{2}b$

$2b - 4 = 8 + \frac{1}{2}b \quad | -\frac{1}{2}b$

$\frac{3}{2}b = 12$

$3b = 24$

$\underline{b = 8}$

$3a = b - 2 = 8 - 2 = 6 \rightarrow \underline{a = 2}$

c) $\begin{cases} 2u - 3v + w = -4\sqrt{2} \\ u + v + 2w = 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2}u - \sqrt{2}v - \sqrt{2}w = -2 \end{cases}$ $\rightarrow 2u = 3v - w - 4\sqrt{2}$

$\rightarrow \underline{u = -v - 2w + 3\sqrt{2}} \rightarrow 2u = -2v - 4w + 6\sqrt{2}$

$3v - w - 4\sqrt{2} = -2v - 4w + 6\sqrt{2} \quad | +2v + w + 4\sqrt{2}$

$\underline{5v = -3w + 10\sqrt{2}}$

$2u = -2v - 4w + 6\sqrt{2}$

$2u - 2v - 2w = -2\sqrt{2} \rightarrow 2u = 2v + 2w - 2\sqrt{2}$

$-2v - 4w + 6\sqrt{2} = 2v + 2w - 2\sqrt{2} \quad | -6\sqrt{2} + 4w - 2v$

$\underline{-4v = 6w - 8\sqrt{2}}$

$\cdot 4$

$\cdot(-5)$

$20v = -12w + 40\sqrt{2}$

$20v = -30w + 40\sqrt{2}$

$\rightarrow -12w + \cancel{40\sqrt{2}} = -30w + \cancel{40\sqrt{2}} \quad | -40\sqrt{2}$

$\boxed{w = 0}$

$-4v = 6 \cdot \cancel{0} - 8\sqrt{2} \Rightarrow v = \frac{-8\sqrt{2}}{-4} = 2\sqrt{2} \rightarrow \boxed{v = 2\sqrt{2}}$

$\rightarrow u = -v - 2w + 3\sqrt{2} = -2\sqrt{2} - 2 \cdot 0 + 3\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{2}}$

Aufgabe 2: Löse die folgenden linearen Gleichungssystem durch Einsetzen.

a) $\begin{cases} 2s + t - 24 = 0 \\ s - 2t + 13 = 0 \end{cases} \longrightarrow s = 2t - 13 = 2\cdot 10 - 13 = 7 \rightarrow \underline{s=7}$

$2\cdot(\underbrace{2t-13}_{s}) + t - 24 = 0$

$4t - 26 + t - 24 = 0$

$5t - 50 = 0$

$5t = 50 \rightarrow \underline{t = 10}$

b) $\begin{cases} 8a + 5b = 13 \\ 4a - 3b = 1 \end{cases} \longrightarrow 4a = 1 + 3b \longrightarrow 8a = 2 + 6b$

$\hookrightarrow 4a = 1 + 3\cdot 1 = 4 \rightarrow \underline{a=1}$

$(\underbrace{2+6b}_{8a}) + 5b = 13$

$2 + 11b = 13 \qquad |-2$

$11b = 11 \longrightarrow \underline{b=1}$

c) $\begin{cases} 4x + y + z = 1 & ① \\ 4x - y - z = -1 & ② \\ x + 4y + 2z = 0 & ③ \end{cases}$

$\longrightarrow 4x = 1 - y - z$

$(\underbrace{1-y-z}_{4x}) - y - z = -1$

$-2y - 2z = -2$

$-y - z = -1$

$\hookrightarrow y = 1 - z = 1 - 2 = -1$

$\hookrightarrow \boxed{y = -1}$

$x = -4y - 2z = -4\cdot(-1) - 2\cdot 2 = 0$

$\hookrightarrow \boxed{x = 0}$

$4x = -16y - 8z$

einsetzen in ②:

$(\underbrace{-16y - 8z}_{4x}) - y - z = -1 \longrightarrow -17y - 9z = -1$

$-17\cdot(1-z) - 9z = -1$

$-17 + \underbrace{17z - 9z}_{} = -1 \qquad |+17$

$8z = 16$

$\boxed{z = 2}$

Aufgabe 3: Wende für die Lösung der folgenden Gleichungssysteme das Additionsverfahren an.

a) $\begin{cases} s - 2t + 3 = 0 & (1) \\ s + 5 = 0 & (2) \longrightarrow s = -5 \\ -3t - 3 = 0 & (3) \longrightarrow 3t = -3 \rightarrow t = -1 \end{cases}$

$$\begin{array}{lrl} (1) & s - 2t + 3 &= 0 \\ (-1)\cdot(2) & -s \quad\; - 5 &= 0 \\ \hline & -2t - 2 &= 0 \rightarrow \underline{t = -1} \end{array}$$

b) $\begin{cases} 2x + 2y = 10 & (1) \\ x - y - z = 0 & (2) \\ x + 3y + 4z = 20 & (3) \end{cases}$

$$\begin{array}{lrl} (1) & 2x + 2y &= 10 \\ (-2)\cdot(2) & -2x + 2y + 2z &= 0 \\ \hline & 4y + 2z &= 10 \quad (4) \\ & -4y - 5z &= -20 \quad (5) \\ \hline & -3z &= -10 \rightarrow \underline{z = \frac{10}{3}} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} (2) & x - y - z &= 0 \\ (-1)\cdot(3) & -x - 3y - 4z &= -20 \\ \hline & -4y - 5z &= -20 \quad (5) \end{array}$$

$-4y - 5\cdot\left(\frac{10}{3}\right) = -20$

$-4y = \frac{50}{3} - 20 = \frac{50-60}{3} = -\frac{10}{3}$

$y = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \rightarrow \underline{y = \frac{5}{6}}$

(2) $x = y + z = \frac{5}{6} + \frac{10}{3} = \frac{5+20}{6} = \frac{25}{6}$

$\hookrightarrow \underline{x = \frac{25}{6}}$

c) $\begin{cases} 2 + 3\lambda_1 - \lambda_2 = 6 & (1) \longrightarrow \lambda_2 = 2 + 3\lambda_1 - 6 = 2 + 3\cdot 4 - 6 \\ 1 + 7\lambda_1 + \lambda_2 = 37 & (2) \\ 8 - 3\lambda_1 + \lambda_2 = 4 & (3) \end{cases}$

$\underline{\lambda_2 = 8}$

$$\begin{array}{lrl} (1) & 2 + 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 6 \\ (3) & 8 - 3\lambda_1 + \lambda_2 &= 4 \\ \hline & 10 + 0 + 0 &= 10 \quad ✓ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} (1) & 2 + 3\lambda_1 - \lambda_2 &= 6 \\ (2) & 1 + 7\lambda_1 + \lambda_2 &= 37 \\ \hline & 3 + 10\lambda_1 &= 43 \end{array}$$

$10\lambda_1 = 40$

$\underline{\lambda_1 = 4}$

Überprüfung:

(3) $8 - 3\cdot\lambda_1 + \lambda_2 = 4$

$8 - 3\cdot 4 + 8 \overset{?}{=} 4$ ✓

Aufgabe 4: Die folgenden Gleichungssysteme haben möglicherweise keine, eine oder unendlich viele Lösungen. Finde heraus, was zutrifft.

a) $\begin{cases} 2a + 2b + 3c = 10 \\ -a + 2b - c = 5 \\ a + b + 3c = 8 \end{cases} \longrightarrow a = 2b - c - 5 = 2\cdot 3 - 2 - 5 = -1$

$\hookrightarrow \underline{a = -1}$

$$\begin{array}{rl} ② & -a + 2b - c = 5 \\ ③ & a + b + 3c = 8 \\ \hline & 3b + 2c = 13 \end{array} \quad \cdot(-2)$$

$$\begin{array}{rl} ① & 2a + 2b + 3c = 10 \\ 2\cdot② & -2a + 4b - 2c = 10 \\ \hline & 6b + c = 20 \\ & -6b - 4c = -26 \\ \hline & -3c = -6 \end{array} \quad \longrightarrow \underline{c = 2}$$

$$\longrightarrow 6b + 2 = 20, \quad 6b = 18, \quad \underline{b = 3}$$

eine eindeutige Lösung

b) $\begin{cases} x - y + z = -2 \\ x + y - z = 0 & ② \\ -2x - 2y + 2z = 0 & ③ \end{cases}$ linear abhängig, d.h. beide Gleichungen beinhalten die gleiche Information

$(-2)\cdot② = ③$

$\Rightarrow$ eigentlich haben wir
3 Unbekannte
2 Gleichungen ①, ② $(\hat{=}③)$

$$\begin{array}{rl} ① & x - y + z = -2 \\ (-1)\cdot② & -x - y + z = 0 \\ \hline & -2y + 2z = -2 \\ & -y + z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2\cdot① & 2x - 2y + 2z = -4 \\ ③ & -2x - 2y + 2z = 0 \\ \hline & -4y + 4z = -4 \end{array} \Rightarrow \text{keine eindeutige Lösung}$$

$-y + z = -1 \longrightarrow$ ~~so~~ unendlich viele Lösungen

$\hookrightarrow$ Gerade in der ~~y, z - Ebene (x = 0)~~

$\hookrightarrow y = 1 + z \longrightarrow$ einsetzen in ② $x + (1 + z) - z = 0 \longrightarrow \underline{x = -1}$ - Ebene

c) $\begin{cases} 2x + 2y + z = 10 & ① \\ x + y + \frac{1}{2}z = 6 & ② \\ x + 3y + 4z = 20 & ③ \end{cases}$ ↯ Widerspruch

$$\left.\begin{array}{rl} ① & 2x + 2y + z = 10 \\ 2\cdot② & 2x + 2y + z = 12 \end{array}\right\}$$ keine (eindeutige) Lösung möglich, die beide Gleichungen erfüllt!

d) $\begin{cases} 3l - 6m - 9n = 1 & ① \\ l - m + 3n = \frac{1}{3} & ② \\ -\frac{1}{2}l + m - n = 0 & ③ \end{cases} \longrightarrow l = \frac{1}{3} + m - 3n = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} + \frac{3}{15} = \frac{14}{15}$

$\hookrightarrow \underline{l = \frac{14}{15}}$

$$\begin{array}{rl} (-3)\cdot② & -3l + 3m - 9n = -1 \\ ① & 3l - 6m - 9n = 1 \\ \hline & -3m - 18n = 0 \quad ⓐ \\ 3\cdotⓑ & 3m + 3n = 1 \\ \hline & -15n = 1 \end{array} \quad \longrightarrow \underline{n = -\frac{1}{15}}$$

$$\begin{array}{rl} ② & l - m + 3n = \frac{1}{3} \\ 2\cdot③ & -l + 2m - 2n = 0 \\ \hline & m + n = \frac{1}{3} \quad ⓑ \end{array}$$

$\hookrightarrow m = \frac{1}{3} - n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{5+1}{15} = \frac{6}{15}$

$\longrightarrow \underline{m = \frac{6}{15}}$

eine eindeutige Lösung

Aufgabe 5: Löse die folgenden Textaufgaben, indem du ein lineares Gleichungssystem aufstellst und dieses dann löst.

a) Auf einem kleinen Bauernhof hat es gesunde, glückliche Hühner und Kühe. Insgesamt sind es 94 Augen und 122 Beine. Wieviele Hühner und Kühe hat der Bauernhof?

Augen: $2h + 2k = 94$ ①
Beine: $2h + 4k = 122$ ②

Anz. Hühner: h
Anz. Kühe: k

① $2h + 2k = 94$
$(-1)\cdot$② $-2h - 4k = -122$
$-2k = -28 \rightarrow \underline{k = 14}$

$\rightarrow 2h = 94 - 2k = 94 - 2\cdot 14 = 66$
$\rightarrow \underline{h = 33}$

b) Heute ist der Vater genau drei mal älter als der Sohn. In sechzehn Jahren wird der Vater nur noch doppelt so alt sein, wie der Sohn. Wie alt sind Vater und Sohn heute?

Heutiges Alter des Vaters: v
Heutiges Alter des Sohnes: s

$\begin{cases} v = 3\cdot s \\ (v+16) = 2\cdot(s+16) \end{cases} \rightarrow v + 16 = 2s + 32$
$v - 2s = 16$

$\begin{cases} v - 3s = 0 & ① \\ v - 2s = 16 & ② \end{cases}$

① $v - 3s = 0$
(-1)② $-v + 2s = -16$
$-s = -16 \rightarrow \underline{s = 16}$

$\rightarrow v = 3s = 3\cdot 16 = 48$
$\underline{v = 48}$

c) Wird eine erste Zahl durch 5 geteilt und eine zweite Zahl durch 4, so erhalten wir den gleichen Bruchwert. Multiplizieren wir anstatt dessen die erste Zahl mit 5 und die zweite Zahl mit 4 so ist das erste Produkt um 36 grösser als das Zweite. Welches waren die beiden Zahlen?

$\frac{z_1}{5} = \frac{z_2}{4} \rightarrow 4z_1 = 5z_2 \rightarrow \begin{cases} 4z_1 - 5z_2 = 0 \\ 5z_1 - 4z_2 = 36 \end{cases}$

$5z_1 - 4z_2 = 36$

$5\cdot$① $20z_1 - 25z_2 = 0$
$(-4)\cdot$② $-20z_1 + 16z_2 = -144$
$-9z_2 = -144$
$z_2 = \frac{144}{9} = 16$
$\rightarrow z_2 = 16$

$4z_1 = 5\cdot 16 = 80 \rightarrow \underline{z_1 = 20}$

d) Alex, Bruno und Cédric haben ein bisschen Taschengeld und sind unterwegs zum Kiosk. Zusammen haben sie 7 Franken. Alex und Cédric haben zusammen einen Franken weniger als Bruno. Wird die Summe von Brunos und Cedrics Geld verdoppelt, so entspricht sie dem Fünffachen vom Betrag, den Alex hat. Wie viel Geld hat jeder der drei?

a = Geld von Alex
b = Geld von Bruno
c = Geld von Cédric

$a + b + c = 7$
$(a + c) + 1 = b \rightarrow a - b + c = -1$
$2\cdot(b + c) = 5a \rightarrow 5a - 2b - 2c = 0$

$\begin{cases} a + b + c = 7 & ① \\ a - b + c = -1 & ② \\ 5a - 2b - 2c = 0 \end{cases}$

① $a + b + c = 7$
(-1)② $-a + b - c = 1$
$2b = 8 \rightarrow \boxed{b = 4}$

$(-5)\cdot$② $-5a + 5b - 5c = 5$
③ $5a - 2b - 2c = 0$
$3b - 7c = 5$

$-7c = 5 - 3b = 5 - 3\cdot 4$
$-7c = -7$
$\boxed{c = 1}$

$a + b + c = 7 \rightarrow a + 4 + 1 = 7 \rightarrow \boxed{a = 2}$