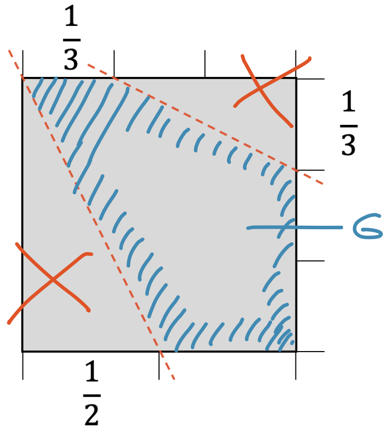
Aufgabe 1: Einem Würfel mit Seitenkante $s = 6$ cm werden zwei Keile weggeschnitten, so dass ein Prisma mit fünfeckiger Grundfläche entsteht. Die nachfolgende Grafik zeigt die beiden Schnitte von oben gesehen.



a) Berechne das Volumen V des entstehenden Prismas.

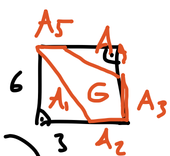
$V = G \cdot h = (23 \cdot 6) = \underline{138 \text{cm}^3} \quad h = s = 6$

$G = A_{\square} - A_{\triangle} - A_{\triangleleft} = 6^2 - 9 - 4 = 36 - 13 = 23$

$\hookrightarrow A_{\triangleleft} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$\hookrightarrow A_{\triangle} = 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 9$

b) Wie gross ist die Oberfläche O (inkl. Grundfläche) des Prismas?



$O = 2G + \sum_{i=1}^{5} A_i = 2 \cdot 23 + 18\sqrt{5} + 18 + 24 + 12\sqrt{5} + 12$

$= 100 + 30\sqrt{5}$

$= \underline{167.1 \text{cm}^2}$

$A_1 = 6 \cdot \sqrt{6^2 + 3^2} = 6 \cdot \sqrt{45} = 6 \cdot \sqrt{9 \cdot 5} = 18\sqrt{5}$

$\sqrt{9} = 3$

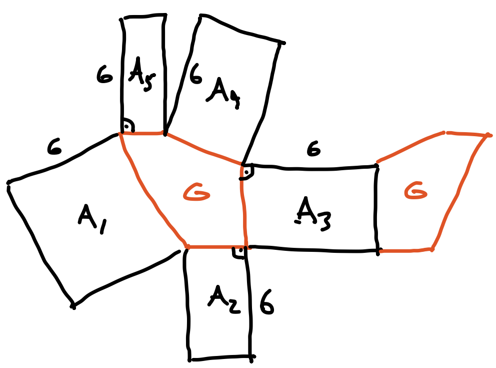
$A_2 = 6 \cdot 3 = 18$

$A_3 = 6 \cdot 4 = 24$

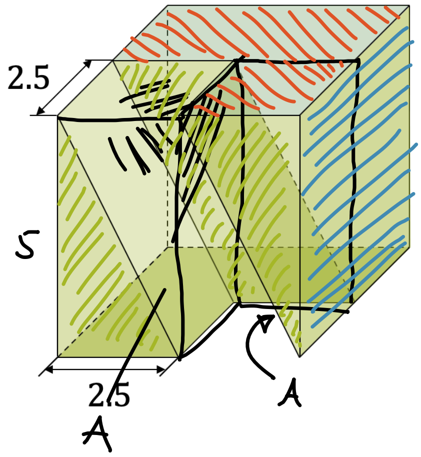
$A_4 = 6 \cdot \sqrt{2^2 + 4^2} = 6 \cdot \sqrt{20} = 6 \cdot \sqrt{4 \cdot 5} = 12\sqrt{5}$

$A_5 = 6 \cdot 2 = 12$

c) Zeichne ein Netz des Prismas.

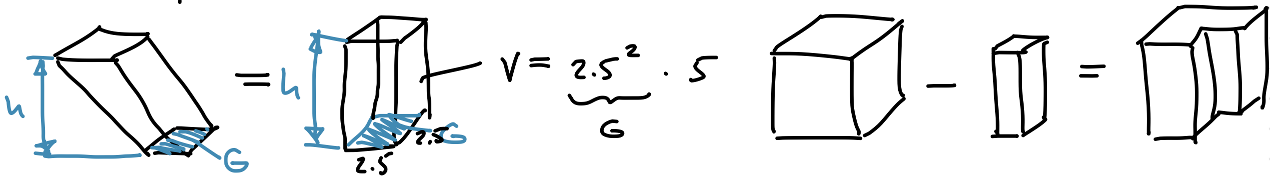


Aufgabe 2: Der Würfel mit Seitenkante $s = 5$ cm hat eine Aussparung, die schräg herausgefräst worden ist.



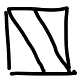
a) Berechne das Volumen V ohne Benutzung des Satzes von Pythagoras.

$$V = \frac{3}{4} s^3 = \frac{3}{4} \cdot 5^3 = \frac{3}{4} \cdot 125 = \underline{93.75 \text{cm}^3}$$



$$V = \underbrace{2.5^2}_{G} \cdot 5$$

b) Berechne die Oberfläche des Körpers.



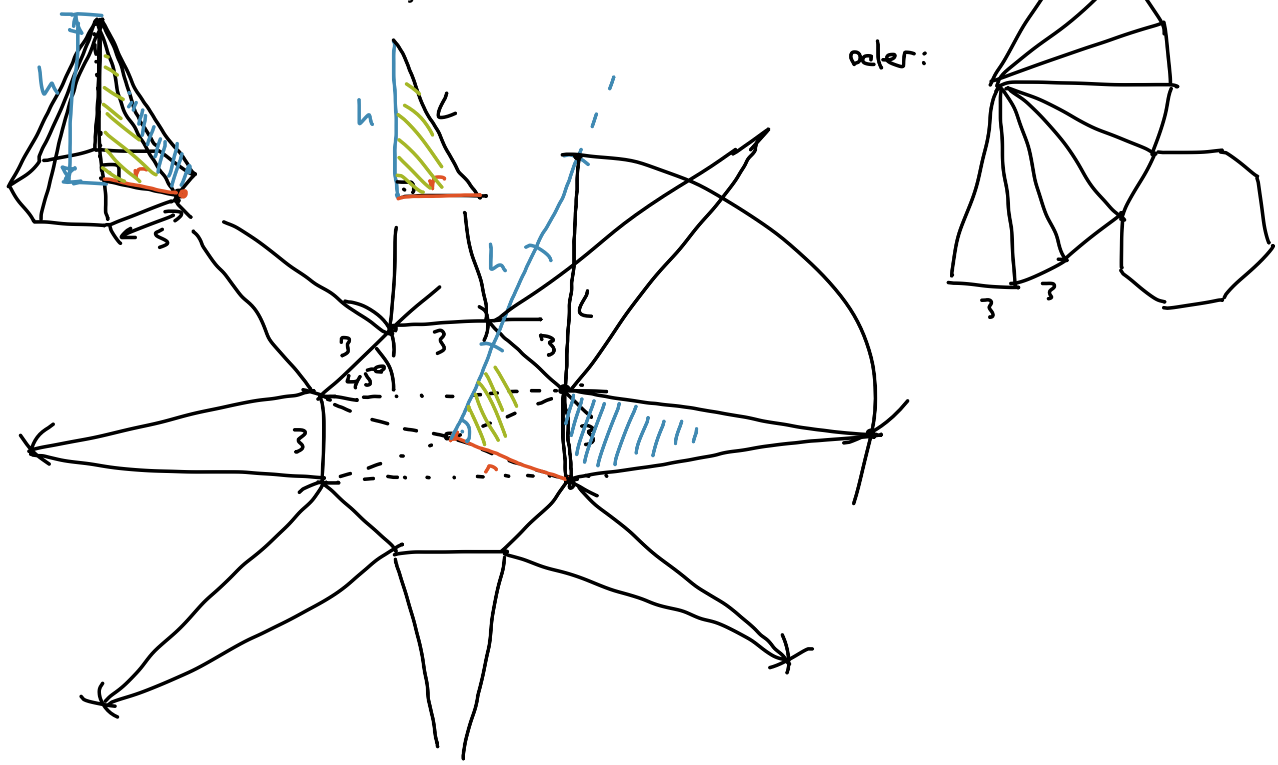
links/rechts: $2s^2$
oben/unten: $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot s^2$
vorne/hinten: $2s^2$
Aussparung: $2A$

$$5.5 s^2 = 5.5 \cdot 5^2 \text{cm}^2$$

$$A = 2.5 \cdot \sqrt{2.5^2 + 5^2} = 13.975 \text{cm}^2$$

$$\underline{O = 165.45 \text{cm}^2}$$

Aufgabe 3: Konstruiere das Netz für eine gleichmässige, gerade Pyramide mit achteckigem Grundriss mit Seitenkante $s = 3$ cm. Die Pyramide soll eine Höhe von $h = 9$ cm haben.



Aufgabe 4: Gleichseitige Dreiecke sind praktische Seitenflächen für geometrische Körper.

a) Welche platonischen Körper sind mit gleichseitigen Dreiecken aufgebaut und mit wie vielen davon?

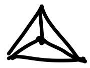
Tetraeder: 4 △   ~~Hexaeder~~ 6 □

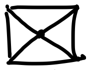
Oktaeder: 8 △   ~~Dodekaeder~~ ⬠

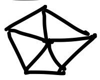
Ikosaeder: 20 △

↗ Winkel $\alpha = 60°$ → △

b) Wie viele gleichseitige Dreiecke bilden (bei den oben gefundenen platonischen Körpern) jeweils eine Raumecke?

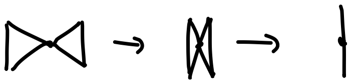
Tetraeder  3 $\sum \alpha = 3 \cdot 60° = 180°$

Oktaeder  4 $\sum \alpha = 4 \cdot 60° = 240°$

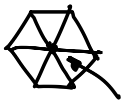
Ikosaeder  5 $\sum \alpha = 5 \cdot 60° = 300°$

$\Big\} < 360°$

c) Warum sind keine anderen platonischen Körper mit gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen möglich?

 2 flach → kein Körper

→ $\sum \alpha = 6 \cdot 60° = 360°$

 6 flach → kein Körper

Punkt liegt in der Ebene
→ keine Raumecke

Aufgabe 5: Die Ecken eines platonischen Körpers werden regelmässig abgeschnitten, so dass ein archimedischer Körper entsteht, d.h. mit zwei regelmässigen Seitenflächenarten. In unserem Fall entstanden durch das Abschneiden der Ecken, acht sechseckige Seitenflächen und sechs neue Quadrate.

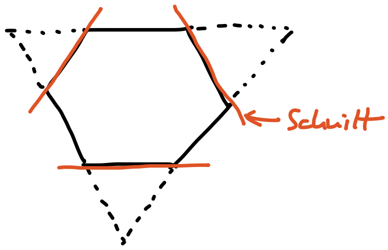
Wie viele Kanten hat der neue Körper? (Tipp: Benutze den Eulerschen Polyedersatz)

$K = ?$

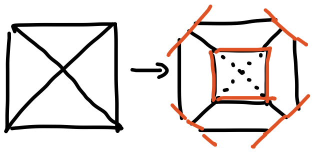
$8 \cdot ⬡ + 6 \cdot \square$

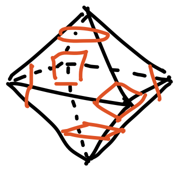
$$E - K + F = 2$$

$$K = E + F - 2 = (4 \cdot 6) + (8+6) - 2$$
$$= 24 + 14 - 2$$
$$\underline{K = 36}$$

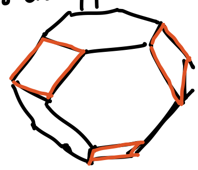


vorher : $8 \cdot \triangle \longrightarrow$ Oktaeder



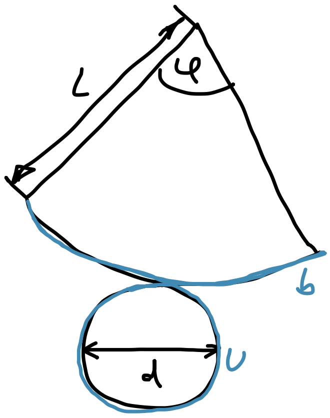


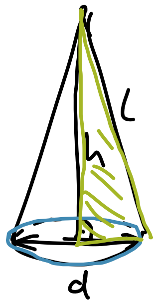
Oktaederstumpf:

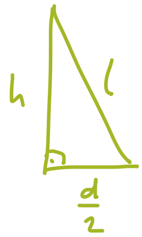


Aufgabe 6: Wir betrachten einen Kegel mit Durchmesser $d = 2$ cm und einer Höhe von $h = 3$ cm.

a) Zeichne das Netz des Kegels und bestimme den Winkel φ für die Mantelfläche.







$b = \frac{\varphi}{2\pi}\cdot 2\pi l = \varphi l \rightarrow \varphi = \frac{b}{l} = \frac{\pi d}{l}$

$U = \pi d \overset{!}{=} b$

$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi \cdot 2}{\sqrt{10}} = 1.9869$

$\varphi = 113.8^\circ$

$l = \sqrt{h^2 + (\frac{d}{2})^2} \underset{\substack{h=3\\ d=2}}{=} \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

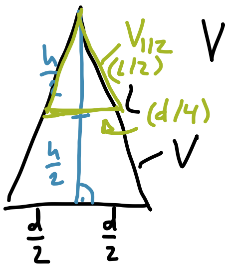
b) Berechne die Oberfläche des Kegels (inkl. Grundfläche).

$O = G + A_M \qquad G = \pi(\frac{d}{2})^2 = \frac{\pi d^2}{4} \underset{d=2}{=} \pi$

$A_M = \pi r l = \pi(\frac{d}{2})\cdot l = \pi\sqrt{10}$

$\rightarrow O = \pi + \pi\sqrt{10} = \pi(1+\sqrt{10}) = 13.08\,cm^2$

c) Zeige, dass die obere Hälfte des Kegels genau $\frac{1}{8}$ des Gesamtvolumens ausmacht.



$V = G\cdot h\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi d^2}{4}\cdot h\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi d^2 h}{12}$

$V_{1/2} = G_{1/2}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{3} = \pi(\frac{d}{4})^2\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi d^2 h}{96} = \underbrace{\frac{\pi d^2 h}{12}}_{V}\cdot\frac{1}{8} = \frac{V}{8}$

d) Zeige nun, dass der halbe Kegel einen Viertel der Oberfläche des ganzen Kegels hat. Was schliesst du daraus für das Verhältnis Oberfläche zu Volumen?

$O = \pi(\frac{d}{2})^2 + \pi(\frac{d}{2})\cdot l = \pi\frac{d}{2}(\frac{d}{2} + l)$

$O_{1/2} = \pi(\frac{d}{4})^2 + \pi(\frac{d}{4})\cdot\frac{l}{2} = \pi\frac{d}{4}(\frac{d}{4} + \frac{l}{2}) = \pi\frac{d}{4}\cdot\frac{1}{2}(\frac{d}{2} + l) = \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\pi\frac{d}{2}\cdot(\frac{d}{2} + l)}_{O} = \frac{1}{4}\cdot O$

kleiner Kegel: $f_{1/2} = \frac{O_{1/2}}{V_{1/2}}$ grosser Kegel: $f = \frac{O}{V}$

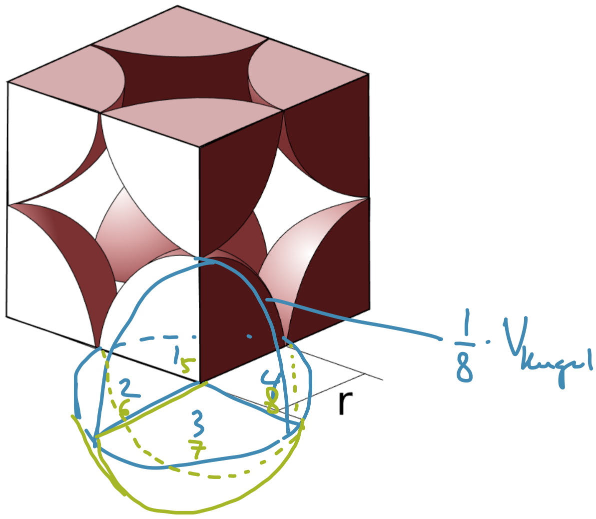
→ kleiner hat doppelte Fläche pro Volumen.

$f_{1/2} = \frac{\frac{O}{4}}{\frac{V}{8}} = \frac{\cancel{8}^{2}\,O}{\cancel{4}\,V} = 2\frac{O}{V} = 2f$

$f_{1/2} = 2f$

Aufgabe 7: Die für uns einfachste Kristallstruktur, die *simple cubic*, ist in der Natur relativ selten. Der Grund liegt darin, dass diese Struktur den Platz nicht optimal ausnutzt. Wir können uns vorstellen, dass die Atome in den Ecken eines Würfels sitzen und sich gerade berühren.

Berechne wie viele Prozent des Gesamtvolumens einer sog. Einheitszelle durch den Zwischenraum zwischen den Atomen eingenommen wird.



$V = \cancel{8}\cdot\frac{1}{\cancel{8}}V_{Kugel} = V_{Kugel} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = (2r)^3 = 8r^3$

$V = 8r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \left(8 - \frac{4}{3}\pi\right) r^3$

Anteil von der Einheitszelle (Würfel): $\dfrac{\left(8-\frac{4}{3}\pi\right)\cancel{r^3}}{8\cancel{r^3}} = \dfrac{8-\frac{4}{3}\pi}{8} = 0.476 = \underline{47.6\%}$