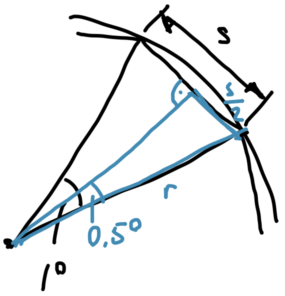
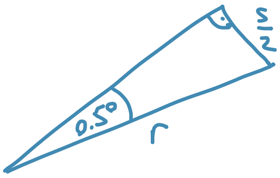
Aufgabe 1: In dieser Aufgabe werden wir die Zahl π mit einem regelmässigen 360-Eck abschätzen, das einem Kreis mit Radius r bzw. Durchmesser d sehr nahe kommt.

a) Stelle einen Ausdruck für den Umfang U des 360-Eck auf.



$U_{360} = 360 \cdot s$



$$\frac{\frac{s}{2}}{r} = \sin 0.5°$$

$$\rightarrow \frac{s}{2} = r \cdot \sin 0.5°$$

$$s = 2r \sin 0.5°$$

$$\hookrightarrow \underline{U_{360} = 720\, r \sin 0.5°}$$

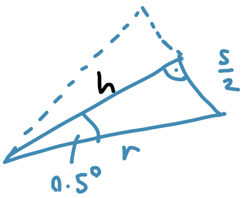
b) Schätze die Zahl π_{360} ab mit Hilfe des Quotienten $\frac{U}{d}$. Auf wie viele Stellen stimmt die Abschätzung?

Kreis: $\frac{U}{d} = \pi$

360-Eck: $\frac{U_{360}}{d} = \pi_{360} \longrightarrow \pi_{360} = \frac{720\cancel{r}\sin 0.5°}{2\cancel{r}} = 360 \sin 0.5°$

$$\pi_{360} = 3.1415528$$
$$\pi \;\;= 3.14159 27$$

c) Stelle einen Ausdruck für die Fläche A des 360-Eck auf.



$A = 360 \cdot 2 \cdot A_\Delta = 360 \cdot \cancel{2}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{s}{\cancel{4}} r \cos 0.5° = 180 \cdot s \cdot r \cdot \cos 0.5°$

$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot r \cos 0.5° = \frac{s}{4} r \cos 0.5°$

$= 180 \cdot (2r \sin 0.5°) \cdot r \cos 0.5°$

$s = 2r \sin 0.5°$

$A = 360 r^2 \underbrace{\sin 0.5° \cos 0.5°}_{\frac{1}{2}\sin 1°}$

$\frac{h}{r} = \cos 0.5° \longrightarrow h = r \cos 0.5°$

$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

$$\underline{A = 180\, r^2 \sin 1°}$$

d) Schätze dieses Mal die Zahl π_{360} mit Hilfe der Fläche $A = \pi_{360} \cdot r^2$ ab.

Kreis: $A = \pi r^2$

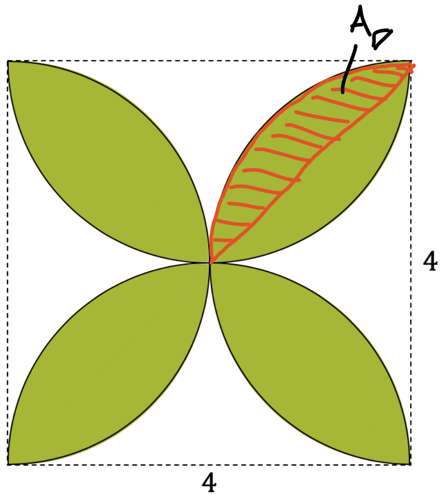
360-Eck: $A = \pi_{360} \cdot r^2 \longrightarrow \pi_{360} = \frac{A}{r^2} = \frac{180\cancel{r^2}\sin 1°}{\cancel{r^2}} = 180 \cdot \sin 1°$

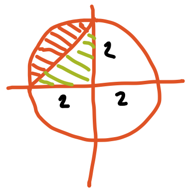
$$= \underline{3.141433}$$

Aufgabe 2: Berechne Fläche und Umfang der folgenden symmetrischen Figur.

Kreis: $A = \pi r^2$

$U = 2\pi r$





$A_{\square} = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 = \cancel{\frac{1}{4}} \cdot \pi \cdot \cancel{4} = \pi$

$A_{\triangle} = \frac{1}{2}(2^2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

$\hookrightarrow r = 2$

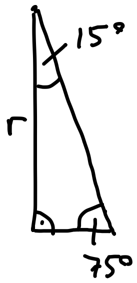
$\rightarrow A_{\lozenge} = A_{\square} - A_{\triangle} = \pi - 2$

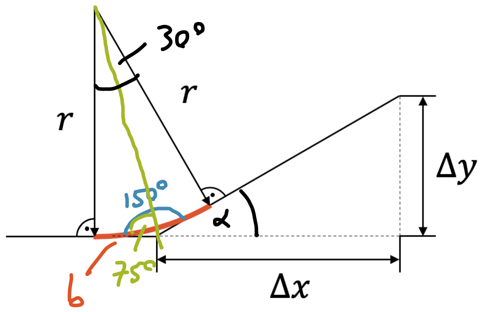
$A = 8 \cdot (\pi - 2) \approx \underline{9.13}$

$U = 8 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = 2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 8\pi \approx \underline{25.13}$

Aufgabe 3: Eine Rampe geht über eine horizontale Strecke von $\Delta x = 200$ cm genau $\Delta y = 115$ cm hoch. Die Ecke soll mit einem Bogen mit Radius $r = 1.5$ m abgerundet werden.

Wie viel beträgt die Länge des Bogens?



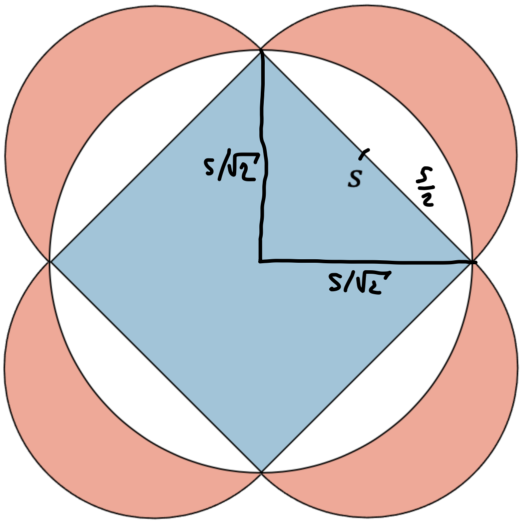


$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{115}{200} \rightarrow \alpha = 29.899° \approx 30°$$

$$U = 2\pi r$$

$$b = \frac{30}{360} \cdot U = \frac{1}{12} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r}{6} \overset{r=1.5m}{=} 0.785\,m = \underline{78.5\,cm}$$

Aufgabe 4: Zeige, dass die vier Mondflächen zusammen die gleiche Fläche haben, wie das Quadrat mit Seitenlänge s.



$$A = \frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{\pi s^2}{8}$$

$$A = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi s^2}{8}$$

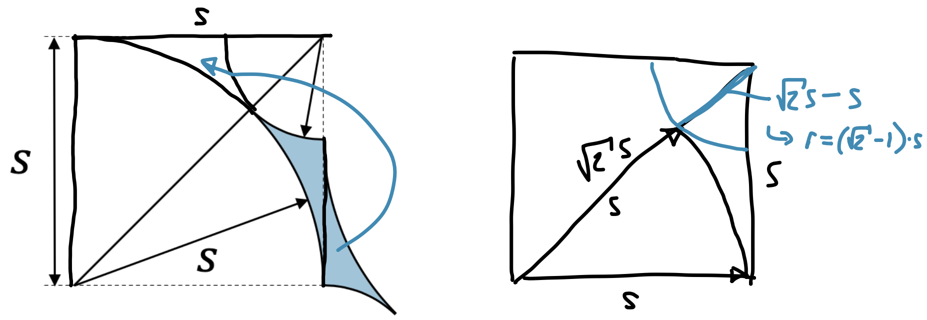
$$A = \frac{1}{4}\cdot s^2 = \frac{s^2}{4}$$

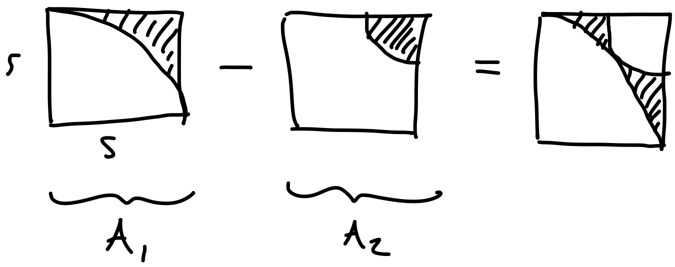
$$\Rightarrow A = A - A$$
$$= \frac{\pi s^2}{8} - \frac{s^2}{4}$$
$$A = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) s^2$$

$$A - A = A = \frac{\pi}{8} s^2 - \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) s^2 = \left(\cancel{\frac{\pi}{8}} - \cancel{\frac{\pi}{8}} + \frac{1}{4}\right) s^2 = \frac{s^2}{4}$$

$$A = 4 \cdot A = s^2 = A$$

Aufgabe 5: Berechne Fläche und Umfang der folgenden symmetrischen Figur als Funktion von s.





$$A_1 = s^2 - \frac{1}{4}\pi s^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)s^2$$

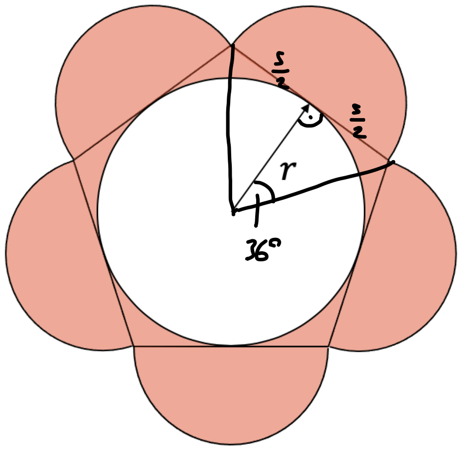
$$A_2 = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2 s^2 = \frac{\pi}{4}\cdot\left(2-2\sqrt{2}+1\right)s^2 = \frac{\pi}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)s^2$$

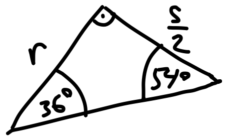
$$A_1 - A_2 = \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\cdot 3 + \frac{\pi}{4}\cdot 2\sqrt{2}\right)s^2 = \left(1 - \pi + \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)s^2 = \underline{\left(1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\pi\right)s^2}$$

$$U = \frac{1}{\cancel{4}\,2}\cdot\cancel{2}\pi s + \frac{1}{\cancel{4}\,2}\cdot\cancel{2}\pi\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)s = \frac{\pi}{2}s + \frac{\pi}{2}s\cdot\left(\sqrt{2}-1\right) = \cancel{\frac{\pi}{2}s} + \frac{\sqrt{2}\pi}{2}s - \cancel{\frac{\pi}{2}s}$$

$$\underline{U = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi s}$$

Aufgabe 6: Aus einem regelmässigen Fünfeck ist eine Blume entstanden.





$$\frac{r}{\frac{s}{2}} = \tan 54°$$

$$\frac{s}{2} = \frac{r}{\tan 54°}$$

a) Berechne die markierte Fläche und den (äusseren) Umfang als Funktion von r.

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{\pi s^2}{8} = \frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{r}{\tan 54°}\right)^2$$

$$A_{⬠} = 10\cdot A_{\triangle} = 10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{2}\cdot r = 5\cdot\frac{r}{\tan 54°}\cdot r = \frac{5r^2}{\tan 54°}$$

$$A_{\circ} = \pi r^2 \longrightarrow A = A_{⬠} - A_{\circ} + 5\cdot A_{\triangle} = \underline{\frac{5r^2}{\tan 54°} - \pi r^2 + \frac{5\pi}{2}\cdot\left(\frac{r}{\tan 54°}\right)^2}$$

$$U = 5\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}\pi\cdot\frac{s}{2} = 5\pi\cdot\frac{r}{\tan 54°} = \underline{\frac{5\pi r}{\tan 54°}}$$

b) Wie wären die Formeln für Fläche und Umfang einer n-Blume?

5-Blume: $\frac{s}{2} = \frac{r}{\tan 54°} = \frac{r}{\tan\left(90° - \frac{360°}{10}\right)} = \frac{r}{\tan\left(90° - \frac{360°}{2\cdot 5}\right)}$

n-Blume: $\frac{s}{2} = \frac{r}{\tan\left(90° - \frac{360°}{2n}\right)}$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= nr\cdot\frac{s}{2} - \pi r^2 + n\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{s}{2}\right)^2 \\ U &= n\cdot\pi\cdot\frac{s}{2} \end{aligned}}$$

$$A = \frac{5r^2}{\tan 54°} - \pi r^2 + \frac{5\pi}{2}\cdot\left(\frac{r}{\tan 54°}\right)^2 = 5r\cdot\frac{s}{2} - \pi r^2 + 5\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{s}{2}\right)^2$$

$$U = \frac{5\pi r}{\tan 54°} = 5\pi\left(\frac{s}{2}\right)$$