Aufgabe 1: Leite die folgenden Identitäten her:

a) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ | $\tan(x+y) = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \dfrac{\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)}$

$$= \dfrac{\dfrac{\sin(x)\cancel{\cos(y)}}{\cos(x)\cancel{\cos(y)}} + \dfrac{\cancel{\cos(x)}\sin(y)}{\cancel{\cos(x)}\cos(y)}}{\underbrace{\dfrac{\cancel{\cos(x)}\,\cancel{\cos(y)}}{\cancel{\cos(x)}\,\cancel{\cos(y)}}}_{1} - \underbrace{\dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}}_{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cdot\frac{\sin(y)}{\cos(y)}}} = \dfrac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)}$$

b) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$ Tipp: Benutze $\cos(x) = \cos(\underbrace{\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{2}}_{x})$

$$\cos(x) = \cos\left(\tfrac{x}{2}+\tfrac{x}{2}\right) = \cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

$$= \left(1-\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right)$$

$\uparrow$

$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

$\Leftrightarrow \cos^2(\alpha) = 1-\sin^2(\alpha)$

$\cos(x) = 1-2\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) \quad \Big| + 2\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right)$

$2\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) + \cos(x) = 1 \quad \Big| -\cos(x)$

$2\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = 1-\cos(x) \quad \Big| :2$

$\sin^2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1-\cos(x)}{2} \quad \Big| \sqrt{\ }$

$\sin\left(\tfrac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{2}}$

c) $\tan(2\pi-\alpha) = -\tan(\alpha)$

$$\left(\tan(2\pi-\alpha) = \tan(-\alpha+2\pi) \underset{\uparrow}{=} \tan(-\alpha) \underset{\uparrow}{=} -\tan(\alpha) \right)$$

π-periodisch ungerade Fkt. $f(x) = -f(-x)$

$$\tan(2\pi-\alpha) = \frac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(2\pi-\alpha)} = \frac{\overset{=0}{\cancel{\sin(2\pi)}}\cos(\alpha) - \overset{1}{\cancel{\cos(2\pi)}}\sin(\alpha)}{\underset{=1}{\cancel{\cos(2\pi)}}\cos(\alpha) + \underset{=0}{\cancel{\sin(2\pi)}}\sin(\alpha)}$$

$$= \frac{-\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = -\tan(\alpha)$$

Aufgabe 2: Zeige, dass folgende Identität gilt:

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Tipp: Benutze $a = x + y$ und $b = x - y$ und untersuche zuerst den folgenden Ausdruck:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y)$$

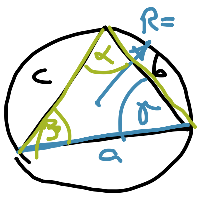
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y - \cancel{\sin x \sin y} + \cancel{\sin x \sin y}$$
$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos x \cos y$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &= \frac{(x+y)+(x-y)}{2} = \frac{2x + \cancel{y} - \cancel{y}}{2} = x \\ \frac{a-b}{2} &= \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + 2y}{2} = y \end{aligned}\right\} \cos(a) + \cos(b) = 2\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Aufgabe 3: Ein Dreieck hat eine Seite $a = 63$ mm, einen Winkel $\gamma = 36°$ und einen Umkreis mit Durchmesser $d = 64$ mm.

a) Berechne die restlichen Seitenlängen und Winkel



$a = 63\,mm$ $\quad \alpha = 79.86°$

$b = 57.6\,mm$ $\quad \beta = 64.14°$

$c = 37.6\,mm$ $\quad \gamma = 36°$

$R = \frac{1}{2}d = 32\,mm$

Sinussatz: $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R \rightarrow c = 2R\cdot\sin\gamma$

$= 2\cdot 32\cdot\sin 36°$

$\underline{c = 37.6\,mm}$

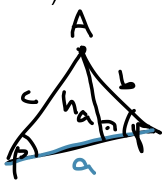
$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{2R}$

$\hookrightarrow \underline{\alpha = 79.86°}$

$\beta = 180° - \alpha - \gamma = \underline{64.14°}$

$\frac{b}{\sin\beta} = 2R \rightarrow b = 2R\cdot\sin\beta = \underline{57.6\,mm}$

b) Wie viel beträgt die Fläche des Dreiecks in cm^2?

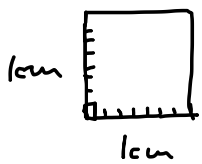


$A = \frac{1}{2}a\cdot h_a$

$\frac{h_a}{c} = \sin\beta \rightarrow h_a = c\cdot\sin\beta = 33.8\,mm$

$A = \frac{1}{2}\cdot 63\,mm\cdot 33.8\,mm = 1065\,mm^2$

$\underline{A = 10.65\,cm^2}$

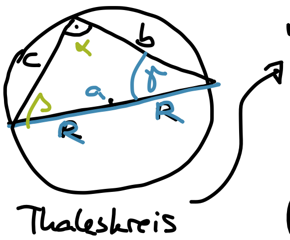


$1\,mm^2 = \frac{1}{100}\,cm^2$

$100\,mm^2 = 1\,cm^2$

c) Warum würde sich die Aufgabe sehr stark vereinfachen, wenn a einen Millimeter grösser wäre?

$a = 64\,mm = 2R$



$\alpha = 90° \rightarrow \beta = 180° - 90° - 36° = \underline{54°}$

$\frac{c}{2R} = \cos\beta \rightarrow c = 2R\cos\beta = \dots$

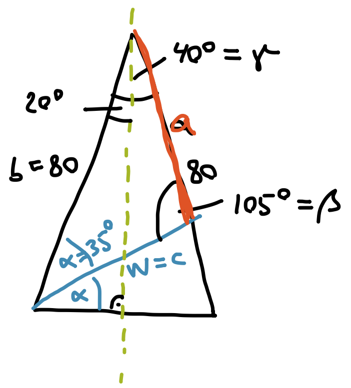
$\left(\frac{b}{2R} = \sin\beta \rightarrow b = 2R\sin\beta = \dots\right)$

$b^2 = (2R)^2 - c^2 \rightarrow b = \dots$

$A = \frac{1}{2}bc$

Aufgabe 4: Ein Dreieck hat zwei Seiten der Länge 80 und einen Winkel von $40°$ an seiner Spitze. Tipp: Mache eine Skizze.

a) Wie lange sind die beiden gleich langen Winkelhalbierenden?



Sinussatz: $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{\sin\beta} \rightarrow w = c = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot b = \dfrac{\sin 40°}{\sin 105°} \cdot 80$

$\underline{w = 53.2}$

b) Berechne die Länge des längeren Teilstücks, das eine dieser Winkelhalbierenden von der Dreiecksseite abschneidet mit dem Sinussatz

Sinussatz: $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha} \rightarrow a = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot c = \dfrac{\sin 35°}{\sin 40°} \cdot 53.2 = \underline{47.5}$

c) Überprüfe das letzte Resultat, indem du die Berechnung mit dem Kosinussatz wiederholst.

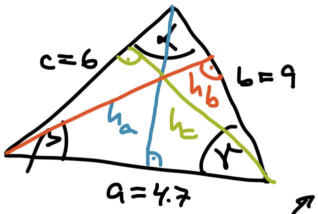
Kosinussatz: $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$

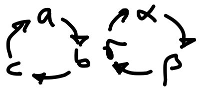
$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$

$a = \sqrt{80^2 + (53.2)^2 - 2 \cdot 80 \cdot 53.2 \cdot \cos(35°)} = \underline{47.5}$

Aufgabe 5: Ein Dreieck hat die folgenden Längen (in cm): $a = 4.7$, $b = 9$ und $c = 6$.

a) Berechne die drei Winkel des Dreiecks





Kosinussatz: $a^2+b^2-2ab\cos\gamma = c^2$

$a^2+b^2-c^2 = 2ab\cos\gamma$

$\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \longrightarrow \underline{\gamma = 37.5°}$

$\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \longrightarrow \underline{\alpha = 28.5°}$

$\beta = 180° - \alpha - \gamma \rightarrow \underline{\beta = 114°}$

b) Wie gross sind die drei Höhen im Dreieck?

$\dfrac{h_a}{b} = \sin\gamma \rightarrow h_a = b\cdot\sin\gamma = 9\cdot\sin 37.5° = \underline{5.48}$

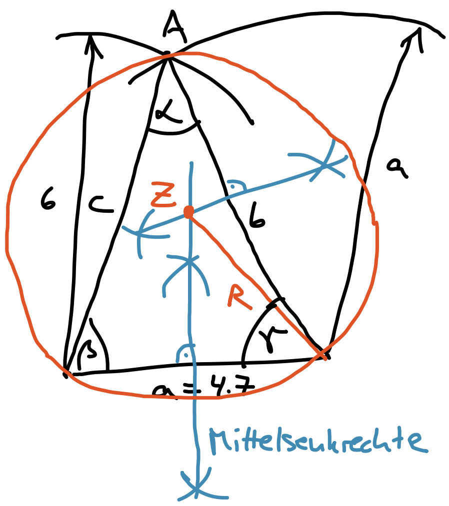
zykl. Permut. $\rightarrow h_b = c\cdot\sin\alpha = 6\cdot\sin 28.5° = \underline{2.86}$

$h_c = a\cdot\sin\beta = 4.7\cdot\sin 114° = \underline{4.29}$

c) Berechne den Radius des Umkreises

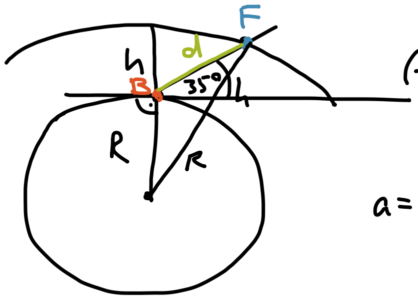
Sinussatz: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R \rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{4.7}{2\cdot\sin(28.5°)} = \underline{4.9}$

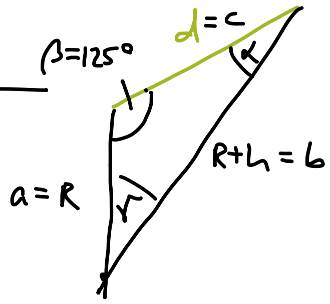
d) Konstruiere das Dreieck mit seinem Umkreis und überprüfe die Ergebnisse.



Aufgabe 6: Ein Flugzeug fliegt auf einer Höhe von 12 km und wird von einem Beobachter unter einem Winkel von $35°$ über dem Horizont gesehen.

Wie gross ist die Distanz zwischen Beobachter und Flugzeug? (Radius der Erde: $6'371$ km)





Kos.satz: $a^2+b^2-2ab\cos\gamma = c^2$

✓ ✓ ✓✓ ? ?

$b^2+c^2-2bc\cos\alpha = a^2$

✓ ? ✓?

$c^2+a^2-2ca\cos\beta = b^2$

? ?

Sin.satz: $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$

✓✓ ?? ✓?

$$\sin\alpha \cdot \frac{b}{\sin\beta} = a$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\cdot\sin\beta = \frac{R}{R+h}\cdot\sin 125° = \frac{6371}{(6371+12)}\cdot\sin 125°$$

$\rightarrow$ $\underline{\alpha = 54.8°}$ $\rightarrow$ $\gamma = 180° - 125° - 54.8° = \underline{0.1535°}$

$$c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot b = \frac{\sin 0.1535°}{\sin 125°}\cdot(6371+12) = \underline{20.9\,\text{km}}$$