

Aufgabe 1: Rechne die folgenden Winkel von Grad in Bogenmass um bzw. umgekehrt.

$$\text{a) } 135^\circ = 90^\circ + 45^\circ = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \underline{\underline{\frac{3\pi}{4}}}$$

$$135^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \dots$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 660^\circ &= 300^\circ + 360^\circ = (360^\circ - 60^\circ) + 360^\circ \\ &= (2\pi - \frac{\pi}{3}) + 2\pi = 4\pi - \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{11\pi}{3}}} \quad \left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

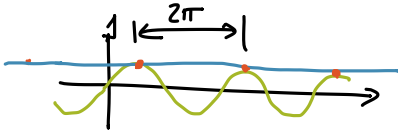
$$\text{c) } \frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\pi}{6}}{4} = \frac{30^\circ}{4} = \underline{\underline{7.5^\circ}}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } -\frac{5\pi}{8} &= \frac{3\pi}{8} - \pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{4} - \pi = \frac{1}{2} \cdot 135^\circ - 180^\circ \\ &= 67.5^\circ - 180^\circ = \underline{\underline{-112.5^\circ}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \frac{16\pi}{3} &= \left(5\frac{1}{3}\right) \cdot \pi = 5\pi + \frac{\pi}{3} = 5 \cdot 180^\circ + 60^\circ = 900^\circ + 60^\circ = \underline{\underline{960^\circ}} \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad 720^\circ + 180^\circ \qquad \qquad \qquad 180^\circ + 60^\circ = (240^\circ) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Gib alle Lösungen der folgenden trigonometrischen Gleichungen im Bogenmass an.

a) $\sin(x) = 1$



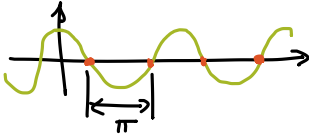
$x = \frac{\pi}{2}$ (2π -periodisch)

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$(x = \frac{\pi}{2} \pm j \cdot 2\pi \quad j \in \mathbb{N}_0)$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

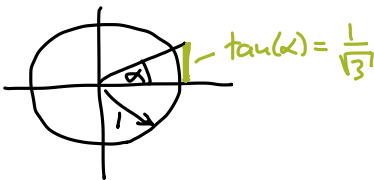
b) $\cos(x) = 0$



$x = \frac{\pi}{2}$ (π -periodisch)

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}$

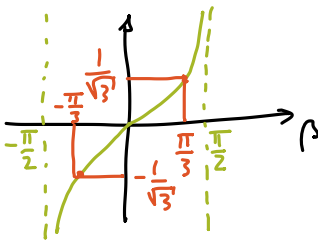
c) $\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$



$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ (π -periodisch)

$\alpha = \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}$

d) $\cot(\beta) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

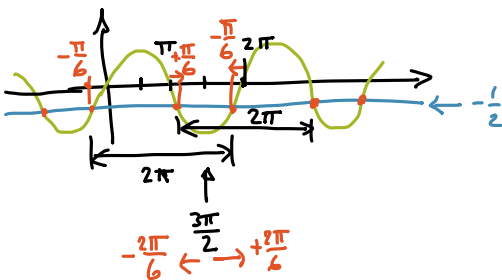


$\cot(\beta) = \frac{1}{\tan(\beta)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan(\beta) = -\sqrt{3} \rightarrow \beta = -\frac{\pi}{3}$ π -periodisch
($\tan 60^\circ = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$)

$\beta = -\frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}$

e) $\sin(\gamma) = -\frac{1}{2}$



$\sin(30^\circ) = \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \rightarrow \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

$\gamma_1 = -\frac{\pi}{6} + n_1 \cdot 2\pi \quad n_1 \in \mathbb{Z}$

$\gamma_2 = \frac{7\pi}{6} + n_2 \cdot 2\pi \quad n_2 \in \mathbb{Z}$

$\gamma = \frac{3\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{6} + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$\gamma = \frac{3\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

oder auch: $\gamma = \frac{\pi}{2} \pm \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 3: Finde alle Lösungen der folgenden trigonometrischen Gleichungen in Bogenmass.

a) $\sin(x) = \sqrt{3} \cdot \cos(x) \quad | : \cos(x) \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{check}$$

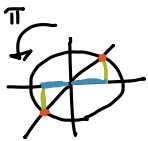
$\tan(x)$



b) $2 \sin(\varphi) = \sin(\varphi) \cdot \left(1 + \frac{1}{\tan(\varphi)}\right) = \sin(\varphi) + \frac{\sin \varphi}{\tan \varphi} = \sin \varphi + \frac{\sin \varphi}{\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}} = \sin \varphi + \cos \varphi$

$\sin \varphi = \cos \varphi \quad \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \pi\text{-periodisch}$

$\rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}$



c) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \sin^2(\alpha) \cdot \cos(\beta) \quad | : \cos(\beta) \neq 0 \quad : \sin(\alpha) \neq 0$

$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\alpha)$

$\cos(\alpha) = \sin(\alpha) \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}$

oder $\beta = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} + \cos(0) = 2 \quad | -1$

$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = 1$

Substitution: $u = x - \frac{\pi}{4} \rightarrow x = u + \frac{\pi}{4}$

$x + \frac{\pi}{4} = u + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = u + \frac{\pi}{2}$

$\frac{\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin(u)} = \frac{\cos(u)}{\sin(u)} = 1 \rightarrow \cos(u) = \sin(u) \rightarrow u = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Rücksubst. $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \quad | + \frac{\pi}{4}$

$\hookrightarrow x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}$

e) $\sin^2(x) + 2 \sin(x) - 3 = 0$

Subst. $u = \sin(x)$

$u^2 + 2u - 3 = 0$

$(u+3)(u-1) = 0$

Rücksubstitution:

$(\sin x + 3) \cdot (\sin x - 1) = 0$

ist nie null!

$\hookrightarrow \sin x = 1 \rightarrow x$ ist Lösung

$x = \frac{\pi}{2}, \quad 2\pi\text{-periodisch}$

$x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe wurden Bogenmass und Grad absichtlich vertauscht. Berechne für die folgenden trigonometrischen Funktionen zuerst den Funktionswert für die richtige Einheit (Grad bzw. Radiant). Schätze dann den Funktionswert für die andere Einheit ab. Überprüfe dann die Ergebnisse mit dem Taschenrechner.

a) $\cos\left(\frac{\pi^\circ}{2}\right)$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\frac{\pi}{2} \approx \frac{3.14}{2} = 1.57^\circ \quad \cos(1.57^\circ) < \underbrace{\cos(0^\circ)}_{=1}$$

$$\approx 0.98$$

TR: $\cos(1.57^\circ) = 0.9996$

b) $\sin(10\pi^\circ)$ $\sin(10\pi) = \sin(5 \cdot 2\pi) = \sin(0) = 0$

$$10\pi \approx 31.4^\circ \quad \underbrace{\sin(31.4^\circ)}_{\approx 0.55} > \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$$

TR: $\sin(31.4^\circ) = 0.521$

c) $\sin(30 \text{ rad})$, wobei $\frac{30}{2\pi} \approx 4.77$ und $0.77 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 277^\circ$

$$\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \quad \uparrow$$

4.77 Umdrehungen bzw. ~~4 Umdrehungen~~ + 277°

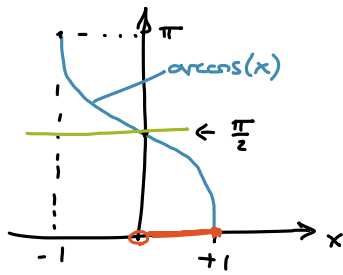


$$\sin(30) \approx \underbrace{\sin(277^\circ)}_{\approx -0.95} > -1$$

TR: $\sin(30) = -0.988$

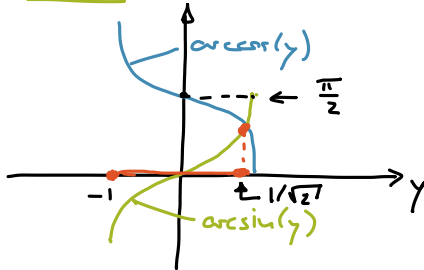
Aufgabe 5: Finde die Lösungsmenge für die folgenden trigonometrischen Ungleichungen.

a) $\arccos(x) < \frac{\pi}{2}$



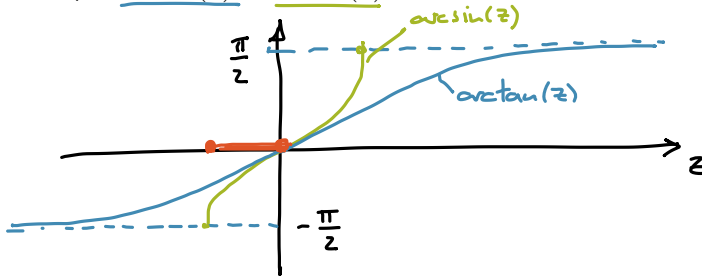
$\mathbb{L} =]0, 1]$

b) $\arcsin(y) \leq \arccos(y)$



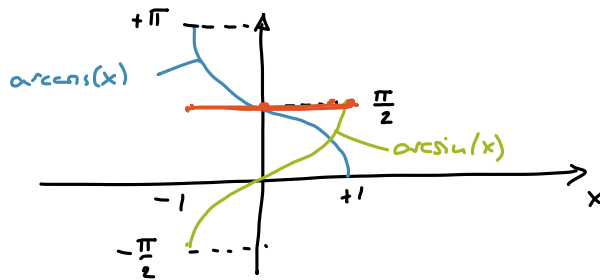
$\mathbb{L} = [-1, \frac{1}{\sqrt{2}}]$

c) $\arctan(z) \geq \arcsin(z)$



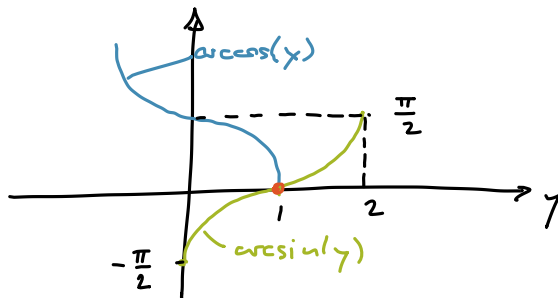
$\mathbb{L} = [-1, 0]$

d) $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$



$\mathbb{L} = [-1, +1]$

e) $\arcsin(y-1) = \arccos(y)$



$\mathbb{L} = \{1\}$