Aufgabe 1: Finden Sie die Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$\neq 0$ $\neq 0$ $\neq 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = -1 + 2 + 0 = 1 \neq 0$$

$\vec{a} \not\perp \vec{b}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \underline{\vec{a} \perp \vec{c}}$

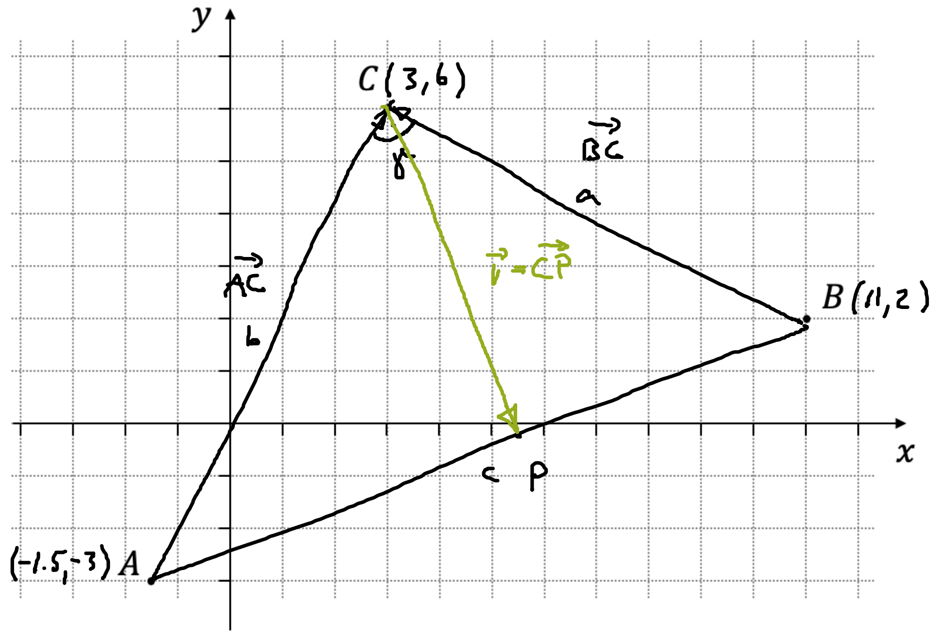
$\vec{a} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow \underline{\vec{a} \perp \vec{d}}$

$\neq 0$

$\neq 0$ $\neq 0$

$\vec{b} \cdot \vec{e} = 0 \rightarrow \underline{\vec{b} \perp \vec{e}}$

Aufgabe 2: Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck.



a) Zeigen Sie algebraisch, dass das Dreieck einen rechten Winkel hat und benennen Sie ihn. Zeichnen Sie danach das Dreieck und überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-(-1.5) \\ 6-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3-11 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4.5 \cdot (-8) + 9 \cdot 4 = -36 + 36 = 0 \checkmark \rightarrow \underline{\text{Winkel } \gamma = 90^\circ}$$

b) Der Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{CP}$ steht senkrecht auf der Seite c. Finden Sie die Komponente v_y des Vektors.

$$\vec{CP} \perp \vec{AB} \qquad \vec{CP} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ v_y \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2.5 \\ -6.25 \end{pmatrix}}$$

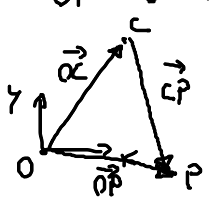
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 11-(-1.5) \\ 2-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{AB} \cdot \vec{CP} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2.5 \\ v_y \end{pmatrix} = \underbrace{12.5 \cdot 2.5}_{\frac{25}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125}{4}} + 5v_y = 0$$

$$5v_y = -\frac{125}{4}$$
$$v_y = -\frac{25}{4} = \underline{-6.25}$$

c) Finden Sie die Koordinaten des Punkts P, wo die Höhe h_c auf c steht.

$$C(3,6) \qquad \vec{CP} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -6.25 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} = \vec{OC} + \vec{CP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.5 \\ -6.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{P(5.5, -0.25)}$$



Aufgabe 3: Finden Sie die Vektoren, die einen Winkel von $30°$ einschliessen. Benutzen Sie dazu

$$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Hinweis: Achten Sie auf die Längen der Vektoren!

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \underbrace{\cancel{|\vec{a}|}}_{=1}\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\frac{3}{4}+1} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} > 1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\cos\varphi \quad \Big| \cdot\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{\cancel{2}\,1}{\sqrt{7}\,\cancel{2}} = \cos\varphi \rightarrow \varphi \neq 30°$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{=\cos(\varphi)} \qquad |\vec{a}| = 1, \; |\vec{c}| = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = 30° \text{ für } \vec{a}, \vec{c}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{d} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos(\varphi)} \qquad |\vec{a}| = 1, \; |\vec{d}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$$

$$\rightarrow \boxed{\varphi = 30° \text{ für } \vec{a}, \vec{d}}$$

$$\vec{b}\cdot\vec{d} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot 1\cdot\cos(\varphi) \quad \Big| \cdot\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \cos\varphi \rightarrow \varphi \neq 30°$$

$$\vec{b}\cdot\vec{e} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi \neq 30°$$

$$\vec{c}\cdot\vec{e} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\cos\varphi \rightarrow \cos\varphi \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi \neq 30°$$

$$\vec{a}\cdot\vec{e} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 1\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\cos\varphi \quad \Big| \cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

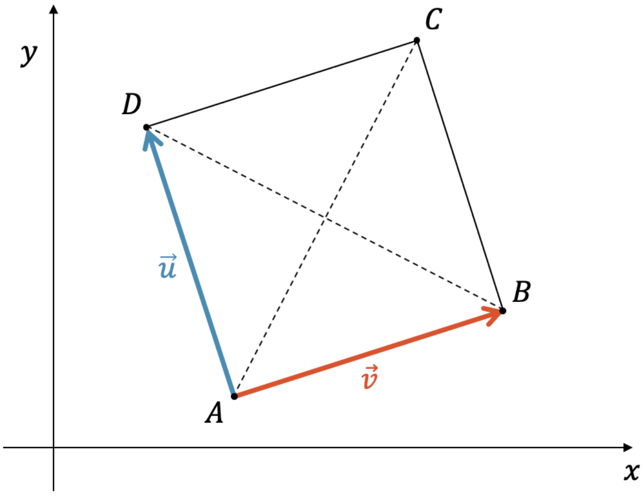
$$\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{4}(3+\sqrt{3}) \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hookrightarrow \varphi \neq 30°$$

$$\vec{d}\cdot\vec{e} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} = 1\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\cos\varphi$$

$$\longrightarrow \varphi \neq 30$$

Aufgabe 4: Das Quadrat $ABCD$ wird durch die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannt.



a) Berechnen Sie die Komponenten der beiden Diagonalvektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ und überprüfen Sie die Tatsache, dass beide Diagonalen eines Quadrats senkrecht aufeinander stehen.

$$\overrightarrow{AC} = \vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-6 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-8) + 8 \cdot 4 = -32 + 32 = 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow \underline{\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}}$$

b) Zeigen, dass die Diagonalen immer senkrecht aufeinander stehen, unabhängig von der Lage und Neigung des Quadrats im Koordinatensystem. Wiederholen Sie Ihre vorhergehende Rechung, jedoch dieses Mal rein algebraisch und ohne mit Komponenten zu arbeiten.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \vec{v} + \vec{u} \\ \overrightarrow{BD} &= \vec{u} - \vec{v} \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\vec{v} + \vec{u}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= 0 - \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} - 0 \\ &= -\underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{|\vec{v}|^2} + \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{|\vec{u}|^2} \\ &= -|\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 = \underline{0} \end{aligned}$$

$\vec{v} \perp \vec{u}$
$\rightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$
(rechte Winkel)

$\Rightarrow$ Diagonalen $\underline{\text{senkrecht}}$

Quadrat: $|\vec{v}| = |\vec{u}|$ (Seiten gleich lang)