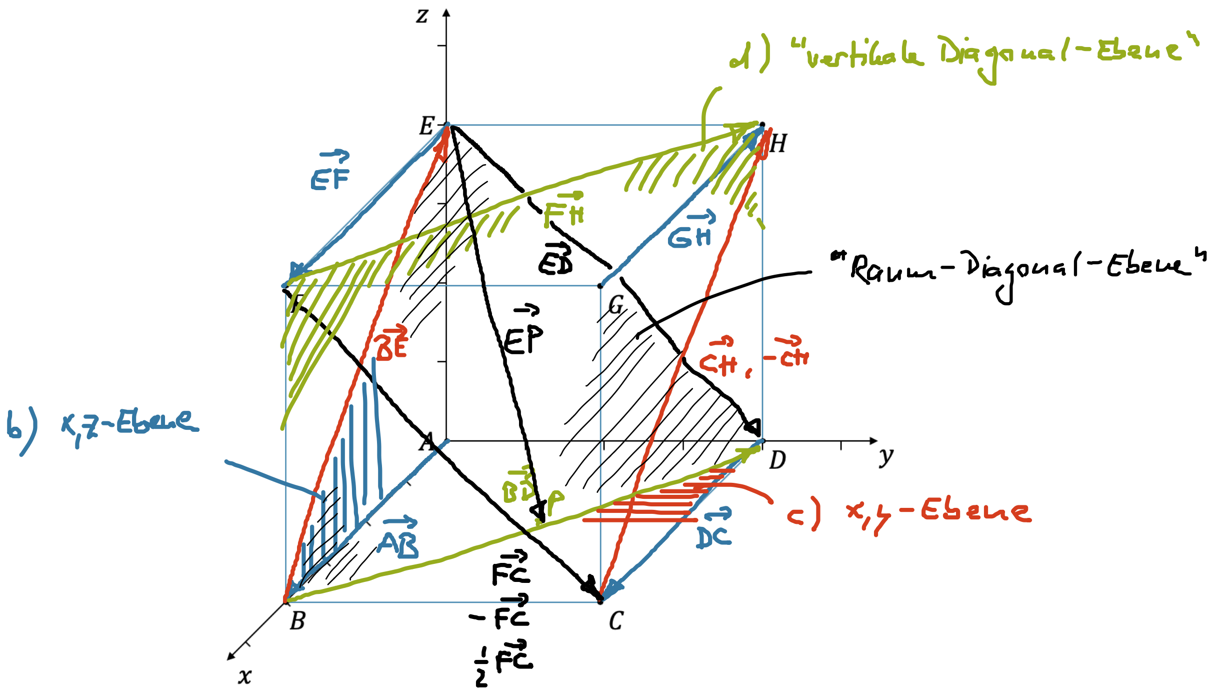
Aufgabe 1: Wir benutzen wieder den Würfel mit den Eckpunkten A bis H.



a) Finden Sie für jeden der folgenden Vektoren, je zwei weitere Vektoren, die zu ihm kollinear sind: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{FH}$ und $\overrightarrow{ED}$

b) Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BE}$ spannen eine Ebene auf. Finden Sie einen Vektor, der zu ihnen komplanar ist.
x,z: Ebene : $\vec{AE}$, $\vec{BF}$, $\vec{AF}$, $\vec{FA}$, $\vec{EF}$ + $\vec{GH}$, $\vec{GD}$, $\vec{GC}$, $\vec{CD}$ etc.

c) Finden Sie einen komplanaren Vektor zu $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{FH}$.
x,y-Ebene: $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BD}$ + $\vec{EF}$, $\vec{EG}$, $\vec{EH}$ etc.

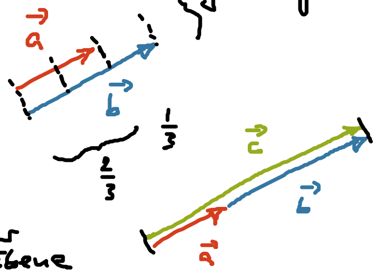
d) Finden Sie einen komplanaren Vektor zu $\overrightarrow{AE}$ und $\overrightarrow{FH}$.
„vertikale Diagonal-Ebene“: $\vec{BF}$, $\vec{CG}$, $\vec{DH}$, $\vec{BD}$, $\frac{1}{2}\vec{BD}$

e) Finden Sie einen komplanaren Vektor zu $\overrightarrow{ED}$ und $\overrightarrow{BD}$.
„Raum-Diagonal-Ebene“: $\vec{BE}$, $\vec{EP}$

Aufgabe 2: Wir haben drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, deren Komponenten nicht bekannt sind. Wir wissen aber, dass folgendes gilt:

$$\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{b}, \qquad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

} gleich gerichtet



Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf *wahr* oder *falsch*.

a) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind kollinear. ✓ (gleiche Richtung)

b) $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar. ✓ (Teil der gleichen Gerade)

c) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen eine bestimmte Ebene auf. ✗

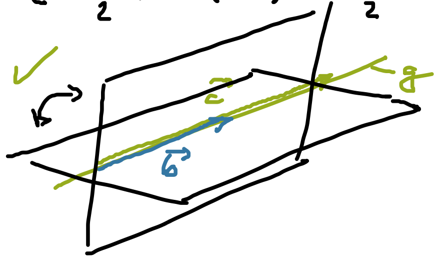
d) $\vec{a}$ und $\vec{c}$ spannen eine bestimmte Ebene auf. ✗

} Gerade oder ∞ viele Ebene ← weil kollinear

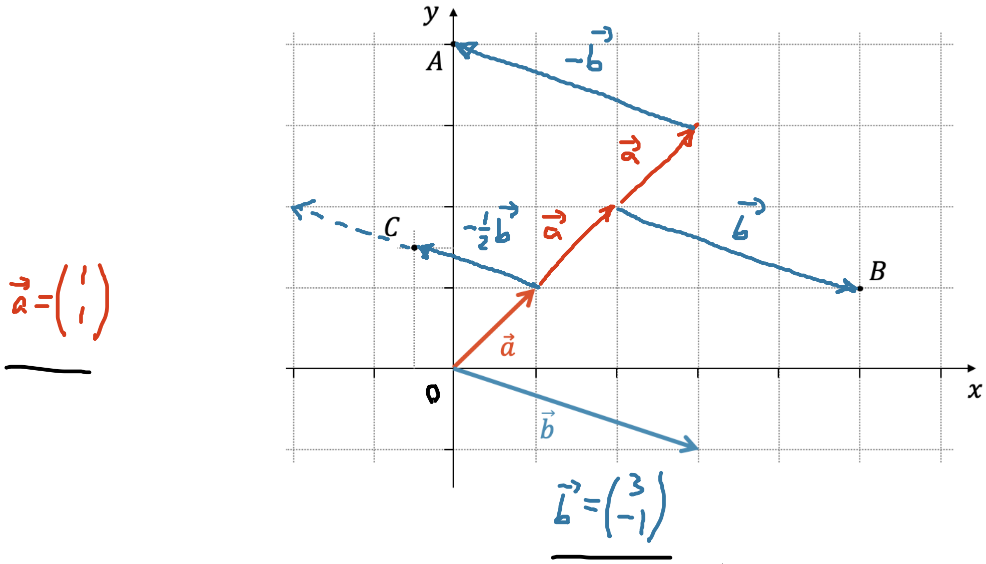
e) $\vec{a}$ und der Gegenvektor von $\vec{c}$ sind kollinear. ✓ $\vec{c} = \frac{5}{2}\vec{a} \rightarrow (-\vec{c}) = -\frac{5}{2}\cdot\vec{a} \rightarrow$ kollinear

f) $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar in mehr als einer Ebene. ✓

∞lich viele Ebene



Aufgabe 3:



a) Lesen Sie die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus der Grafik ab und bestimmen Sie die Linearkombinationen der beiden Vektoren, die $\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$ und $\overrightarrow{0C}$ ergeben. Bestimmen Sie die Linearkombinationen grafisch im Koordinatensystem.

$\overrightarrow{0A} = 3 \cdot \vec{a} - \vec{b}$ $\quad \overrightarrow{0B} = 2\vec{a} + \vec{b}$ $\quad \overrightarrow{0C} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

b) Berechnen Sie die Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, um vom Ursprung den Punkt $D(12, 0)$ zu erreichen.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b} = \overrightarrow{0D} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$

$k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow k + 3l = 12$ ① $\rightarrow k - l = 0 \rightarrow k = l$ ②

① mit ② $\quad l + 3l = 12$

$4l = 12 \rightarrow \underline{l = 3}$

$\underline{k = 3}$

Kontrolle:

$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+9 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$

c) Berechnen Sie die Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, um vom Ursprung den Punkt $E(900, 900)$ zu erreichen.

$k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 900 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0E}$ $\rightarrow k + 3l = 900$ ① $\rightarrow k - l = 900$ ②

$\hookrightarrow k = l + 900$

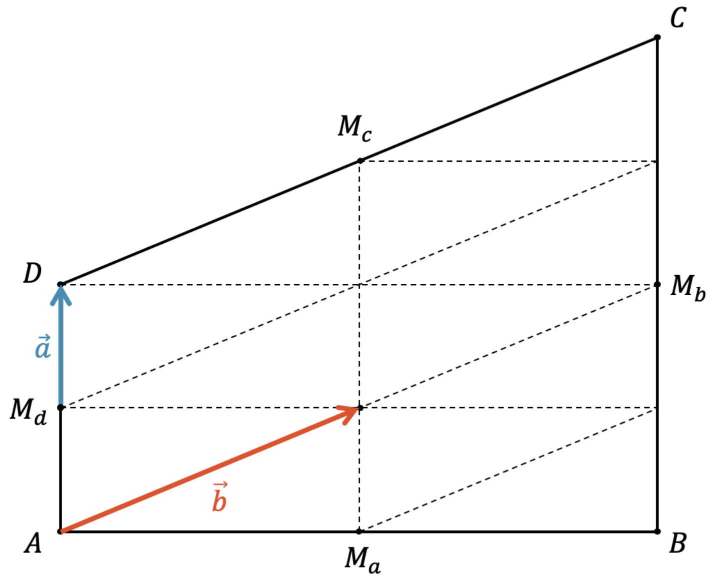
①: $(l + 900) + 3l = 900$

$l + 900 + 3l = 900 \quad | -900$

$4l = 0 \rightarrow \underline{l = 0}$

$\hookrightarrow \underline{k = 900}$

Aufgabe 4: Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit seinen Seitenmitten M_a bis M_d. Zusätzlich sind die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben. Drücken Sie die folgenden Vektoren als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.



a) $\overrightarrow{AM_b}$ $= \underline{2\vec{b}}$

b) $\overrightarrow{AB}$ $= 2\vec{b} - 2\vec{a} = \underline{2(\vec{b} - \vec{a})}$

c) $\overrightarrow{BM_d}$ $= \underline{3\vec{a} - 2\vec{b}}$

d) $\overrightarrow{M_bM_c}$ $= \underline{2\vec{a} - \vec{b}}$

e) Welche Punkte verbindet $(\vec{b} - 2\vec{a})$? $\underline{\overrightarrow{M_d M_a}}$, $\underline{\overrightarrow{M_c M_b}}$, $\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB})$

Aufgabe 5: Gegeben sind die folgenden Punkte $A(3,5,1)$, $B(2,6,8)$ und $C(0,8,22)$.

a) Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ kollinear sind.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-3 \\ 6-5 \\ 8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 8-6 \\ 22-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$\underline{2 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ sind kollinear.

b) Berechnen Sie s, so dass

$$2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 8-5 \\ 22-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+9 \\ 2-9 \\ 14-63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -49 \end{pmatrix} \overset{!}{=} s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \underline{s = 7}$

c) Berechnen Sie für $P(11,-11,-77)$ den Parameter t, so dass

$$\overrightarrow{0P} = t \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} 11 \\ -11 \\ -77 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow & 11 = t \cdot (-3) \\ \rightarrow & -11 = t \cdot 3 \\ \rightarrow & -77 = t \cdot 21 \end{matrix} \Bigg\} \; 3t = -11 \rightarrow \underline{t = -\tfrac{11}{3}}$$

3 Gl. äquivalent

d) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ *nicht* kollinear ist mit $\overrightarrow{AB}$

ist komplanar zur x,y-Ebene

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

← sticht aus der x,y-Ebene heraus

Widerspruch, da beides gleichzeitig gelten muss!

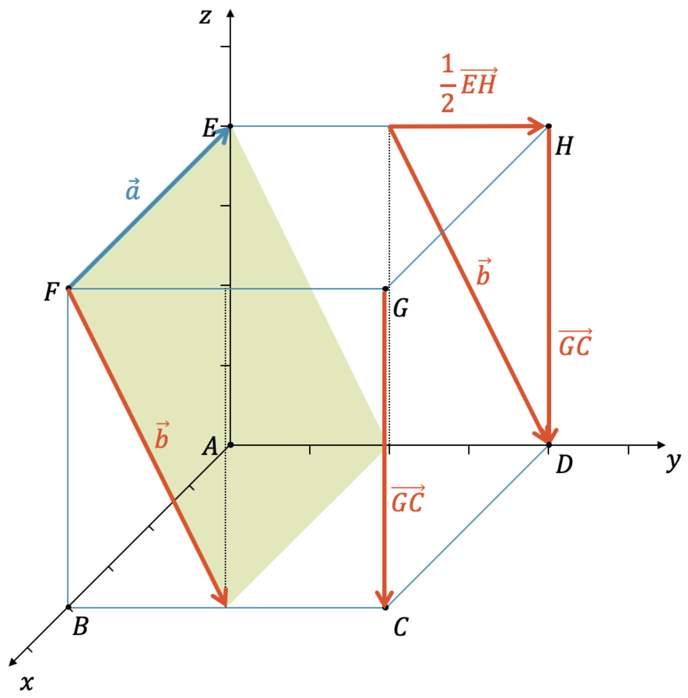
$$\overrightarrow{AB} = k \cdot \vec{v} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow & k = -1 \\ \rightarrow & k = 1 \\ & \cancel{0 = 7} \end{matrix} \Big\} \; \mathbb{L} = \{ \}$$

$\Rightarrow$ Es gibt kein k

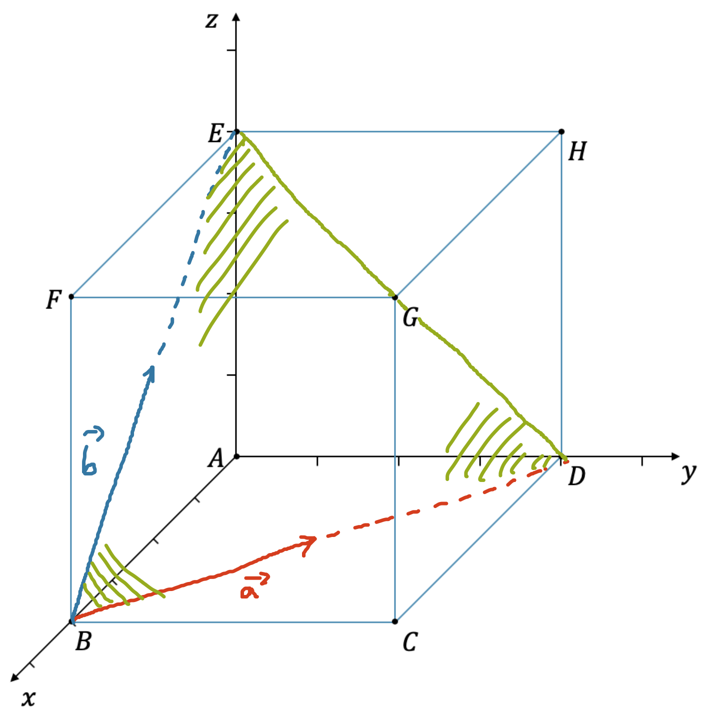
$\Rightarrow$ nicht kollinear

Aufgabe 6: In den folgenden Aufgaben sind zwei Vektoren gegeben, die eine Ebene aufspannen. Gesucht ist das Schnittbild der Ebene mit dem Würfel. Zeichnen Sie auch die Vektoren, gemäss folgendem Beispiel:

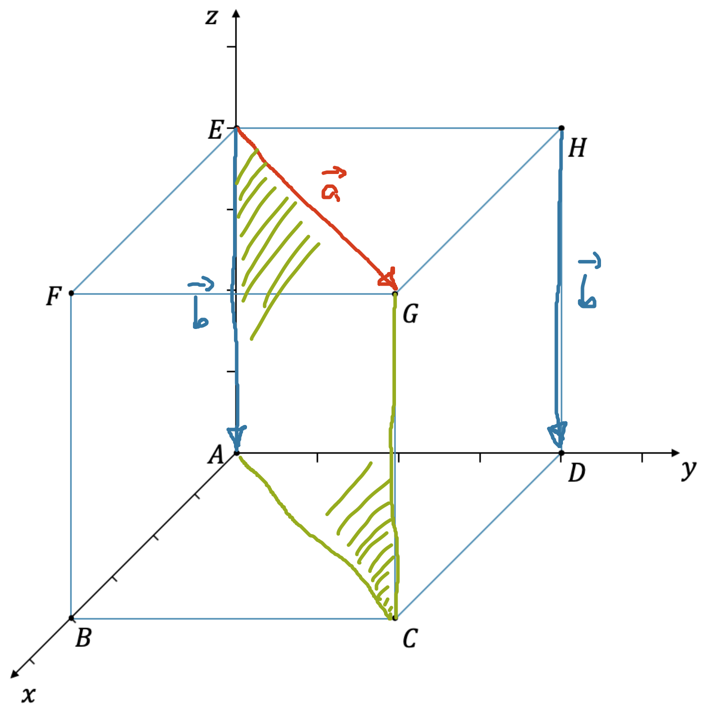
$$\vec{a} = \overrightarrow{FE}, \qquad \vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GC}$$



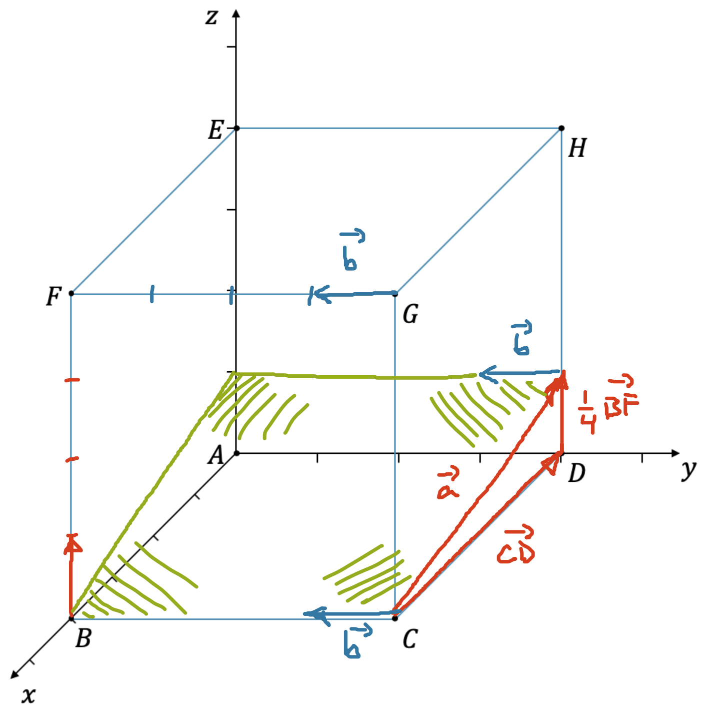
a) Ebene in B, aufgespannt durch: $\vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE}$



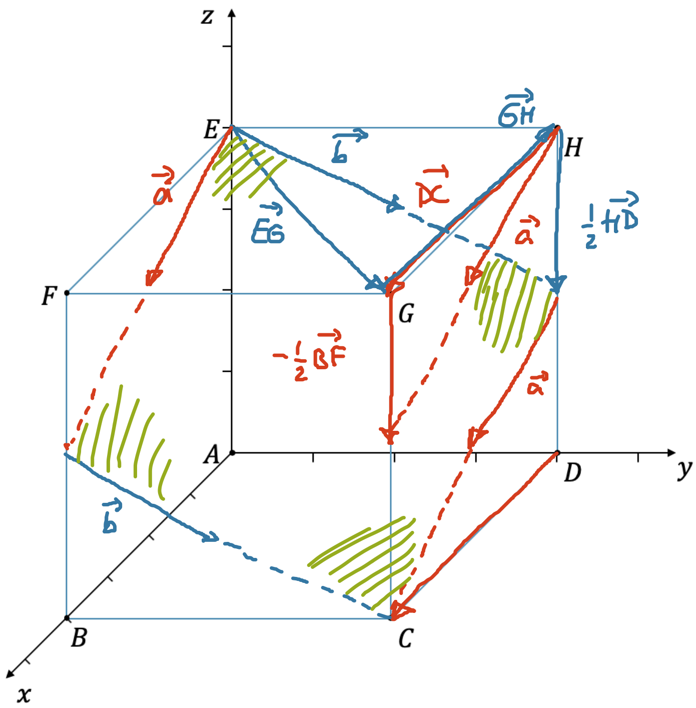
b) Ebene in A, aufgespannt durch: $\vec{a} = \overrightarrow{EG}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{HD}$



c) Ebene in C, aufgespannt durch: $\vec{a} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{\underset{4}{\cancel{3}}}\overrightarrow{BF}, \quad \vec{b} = -\frac{1}{\underset{4}{\cancel{3}}}\overrightarrow{GF}$



d) Ebene in E, aufgespannt durch: $\vec{a} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BF})$, $\vec{b} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HD})$



e) Ebene in A, aufgespannt durch: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$