Aufgabe 1: Lösen Sie die folgenden Gleichungen algebraisch und bestimmen Sie die Lösungsmenge für die Unbekannte Variable:

a) $13 - 0.7x^2 = -1$ $\quad\mid +0.7x^2$

$13 = -1 + 0.7x^2$ $\quad\mid +1$

$14 = 0.7x^2 = \frac{7}{10}x^2$ $\quad\mid \cdot\frac{10}{7}$

$14 \cdot \frac{10}{7} = \frac{140}{7} = 20 = x^2 \longrightarrow x = \pm\sqrt{20} = \pm\sqrt{4\cdot 5} = \pm 2\sqrt{5}$

$\hookrightarrow \mathbb{L} = \{-2\sqrt{5}, +2\sqrt{5}\}$

b) $\underbrace{(3+x)(3-x)} = 8 \cdot (\frac{x}{8} - 9) - x$

$9 - x^2 = \cancel{8}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{8}} - 72 - \cancel{x} = -72 \quad \mid +x^2 \; +72$

$9 + 72 = x^2 \longrightarrow x^2 = 81 \longrightarrow x = \pm 9 \longrightarrow \mathbb{L} = \{-9, +9\}$

c) $\frac{4}{6-m} = \frac{2}{m+2} - \frac{7}{m-4}$

$\frac{4}{6-m} = \frac{2\cdot(m-4) - 7\cdot(m+2)}{(m+2)(m-4)} = \frac{2m - 8 - 7m - 14}{(m+2)(m-4)} = \frac{-5m-22}{(m+2)(m-4)} \quad \mid \cdot(m+2)(m-4)$

$\frac{4}{6-m} \cdot (m+2)(m-4) = -5m - 22$

$4(m+2)(m-4) = -(5m+22)\cdot(6-m)$

$= (5m+22)\cdot(m-6)$

$4(m^2 - 4m + 2m - 8) = (5m^2 - 30m + 22m - 6\cdot 22)$

$4m^2 - \cancel{8m} - 32 = 5m^2 - \cancel{8m} - 132 \quad \mid -4m^2 + 8m + 32$

$0 = m^2 - 100$

$m^2 = 100 \rightarrow m = \pm 10 \rightarrow \mathbb{L} = \{-10, +10\}$

d) $(a+4)^2 = 44 - (a-4)^2$

$a^2 + 8a + 16 = 44 - (a^2 - 8a + 16)$

$a^2 + \cancel{8a} + 16 = 44 - a^2 + 8a - 16 = -a^2 + \cancel{8a} + 28 \quad \mid +a^2 - 8a - 28$

$2a^2 - 12 = 0$

$2a^2 = 12$

$a^2 = 6 \longrightarrow a = \pm\sqrt{6} \longrightarrow \mathbb{L} = \{-\sqrt{6}, +\sqrt{6}\}$

e) $(x-1)^4 = 256 = 2^8 = 2^{2\cdot 4} = (2^2)^4 = 4^4$

$x - 1 = \pm 4 \quad \mid +1$

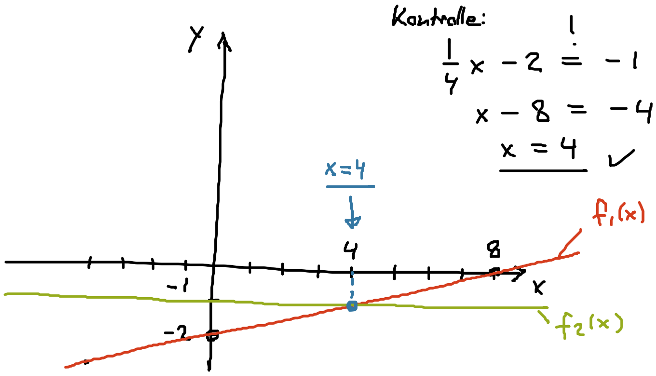
$x = 1 \pm 4$ ⟨ $x = 1+4 = 5$, $x = 1-4 = -3$ ⟩ $\mathbb{L} = \{-3, 5\}$

Aufgabe 2: Gegeben sind die vier Funktionen f_1 bis f_4:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x - 2\,, \quad f_2(x) = -1\,, \quad f_3(x) = (x+1)\,, \quad f_4(x) = -|x+1| + 2$$

Finden Sie die Lösung(en) der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichung mit Hilfe der grafischen Methode:

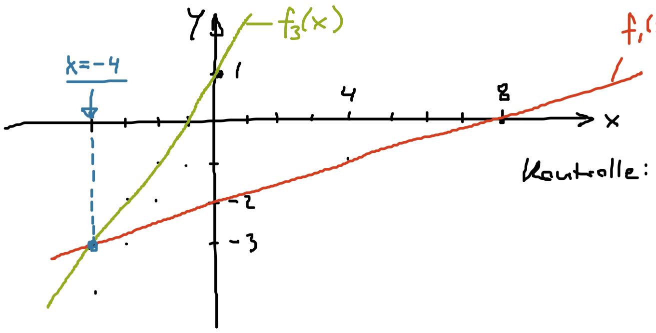
a) $f_1 = f_2$



Kontrolle:

$$\frac{1}{4}x - 2 \overset{!}{=} -1 \quad \Big|\cdot 4$$
$$x - 8 = -4 \quad \Big| +8$$
$$\underline{x = 4} \ \checkmark$$

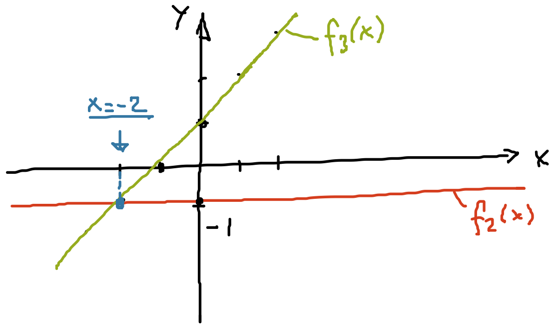
b) $f_1 = f_3$



Kontrolle:

$$\frac{1}{4}x - 2 \overset{!}{=} x + 1 \quad \Big|\cdot 4$$
$$x - 8 = 4x + 4 \quad \Big| -x \ -4$$
$$-12 = 3x \quad \Big| :3$$
$$\underline{x = -4} \ \checkmark$$

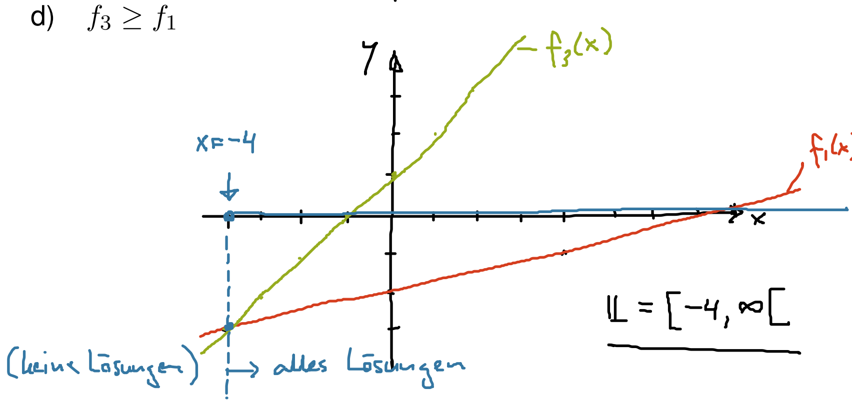
c) $f_2 = f_3$



Kontrolle:

$$-1 \overset{!}{=} x + 1 \quad \Big| +1$$
$$0 = x + 2 \quad \Big| -2$$
$$\underline{x = -2} \ \checkmark$$

d) $f_3 \geq f_1$



$$\underline{\mathbb{L} = [-4, \infty[}$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen algebraisch und stellen Sie auch mit der grafischen Methode dar. Stellen Sie für den Verlauf der Funktionen zuerst eine kleine Wertetabelle auf.

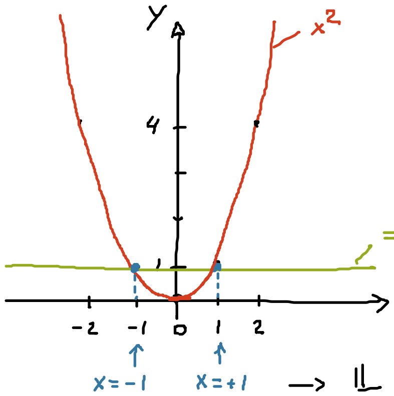
a) $x^2 = 1 \longrightarrow \underline{x = \pm 1}$

$\downarrow$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{1} = 1$

x

$\left.\begin{array}{l} x^2 = (-x)^2 \\ \sqrt{(-x)^2} = -x \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \pm x = 1 & |\cdot \pm 1 \\ x = \pm 1 & \end{array}$



$\longrightarrow \underline{\mathbb{L} = \{-1, +1\}}$

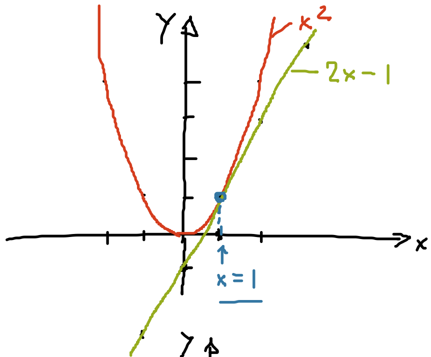
b) $x^2 = 2x - 1 \quad | -2x + 1$

$\underbrace{x^2 - 2x + 1} = 0$

$(x-1)^2 = 0 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm(x-1) = 0$

$\left\{\begin{array}{lll} +x-1 = 0 & \longrightarrow & x = 1 \\ -x+1 = 0 & \longrightarrow & x = 1 \end{array}\right\} \quad \underline{\mathbb{L} = \{1\}}$



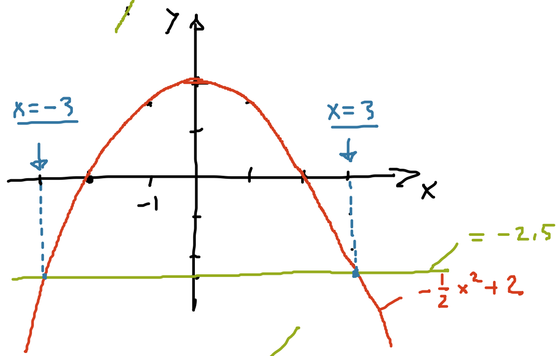
c) $-\frac{1}{2}x^2 + 2 = -\frac{5}{2} = -2{,}5$

x	−2	−1	0	1	2	3
$-\frac{1}{2}x^2+2$	0	1.5	2	1.5	0	−2.5

$-\frac{1}{2}x^2 + 2 = -2.5 \quad |\cdot(-2)$

$x^2 - 4 = 5 \quad | +4$

$x^2 = 9 \rightarrow \underline{x = \pm 3} \longrightarrow \mathbb{L} = \{-3, +3\}$



d) $-\frac{1}{4}x^2 + 1 = x + 2$

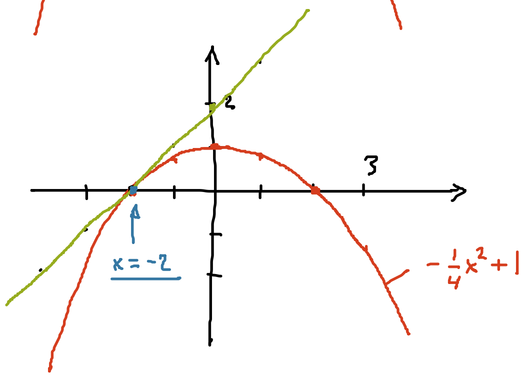
x	−2	−1	0	1	2	3
$-\frac{1}{4}x^2+1$	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{5}{4}$

$-\frac{1}{4}x^2 + 1 \overset{!}{=} x + 2 \quad |\cdot 4$

$-x^2 + 4 = 4x + 8 \quad | +x^2 - 4$

$\underbrace{x^2 + 4x + 4} = 0$

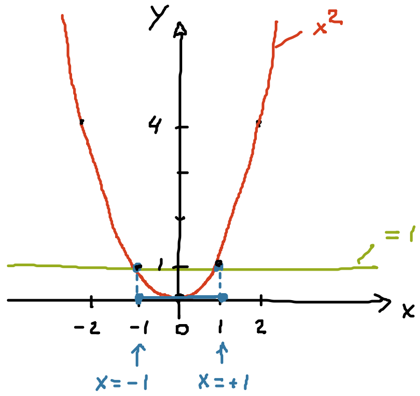
$(x+2)^2 = 0 \longrightarrow x = -2 \longrightarrow \underline{\mathbb{L} = \{-2\}}$



Aufgabe 4: Übernehmen Sie die grafischen Darstellungen der Aufgabe 3 und bestimmen Sie damit die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

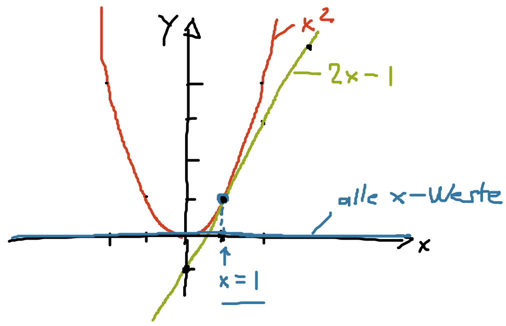
a) $x^2 \leq 1$

$\underline{\mathbb{L} = [-1, 1]}$



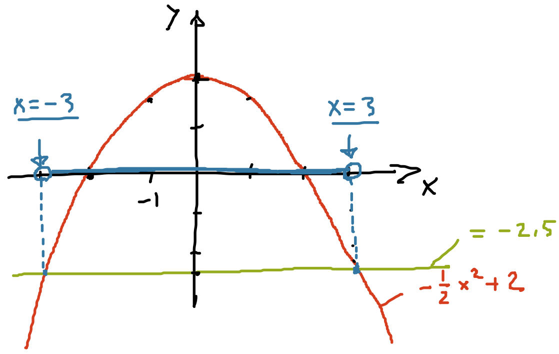
b) $x^2 \geq 2x - 1$

$\underline{\mathbb{L} = \mathbb{R}}$



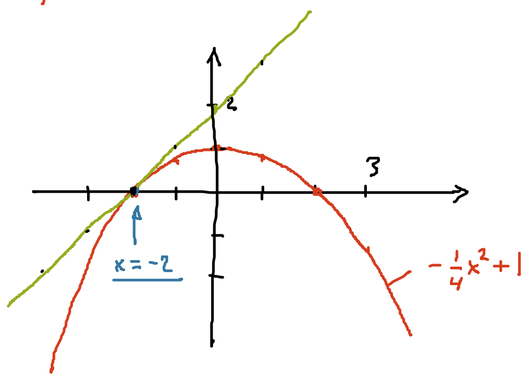
c) $-\frac{1}{2}x^2 + 2 > -\frac{5}{2}$

$\underline{\mathbb{L} =]-3, +3[}$



d) $-\frac{1}{4}x^2 + 1 > x + 2$

$\underline{\mathbb{L} = \{ \}}$



Aufgabe 5: Lösen Sie die folgenden Gleichungen und stellen Sie die Lösungsmengen auf. Achten Sie bei der Rechnung auf Verlust- und Gewinnumformungen. Markieren und benennen Sie diese in Ihrer Rechnung und identifizieren Sie allfällige Scheinlösungen.

a) $\frac{2x^2-3}{x-2} = \frac{x^2+1}{x-2}$ $\quad | \cdot (x-2)$ für $x \neq 2$ Einschränken! Gewinnumformung

$2x^2 - 3 = x^2 + 1 \quad | -x^2 + 3$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2 \longrightarrow x = -2 \rightarrow \underline{\mathbb{L} = \{-2\}}$ $\quad x = +2$ ist eine Scheinlösung

b) $\frac{3x(1-\frac{x}{3})}{x+1} = -\frac{4}{x+1}$ $\qquad \frac{3x - \cancel{3x}\frac{x}{\cancel{3}}}{x+1} = -\frac{4}{x+1}$

$\frac{3x - x^2}{x+1} = -\frac{4}{x+1} \quad | \cdot (x+1)$ für $x \neq -1$ (Gewinnumformung)

$3x - x^2 = -4 \quad | + x^2 - 3x$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x+1)(x-4) = 0 \rightarrow \mathbb{L} = \{\cancel{-1}, 4\} \rightarrow \underline{\mathbb{L} = \{4\}}$

Scheinlösung

c) $(x-5)\cdot(x^2-3) = (x-5)$ $\quad | :(x-5)$ für $x \neq 5$ (Fall 1) Verlustumformung

$1 \cdot (x^2 - 3) = 1$

$x^2 - 3 = 1 \quad | +3$

$x^2 = 4 \rightarrow \underline{x = \pm 2}$

Fall 2: $\underline{x = 5}$

$\underline{\mathbb{L} = \{-2, +2, +5\}}$

d) $x^4 - 2x^3 + x^2 = x^3 - x^2$ $\qquad \underline{\mathbb{L} = \{0, 1, 2\}}$

$x^2 \underbrace{(x^2 - 2x + 1)} = x^2(x-1)$

$x^2(x-1)^2 = x^2(x-1)$ $\qquad \underline{x = 0}$

$\underline{x = 1}$

$(x-1) = 1$ $\qquad | : x^2(x-1)$ für $x \neq 0$ und $x = 1$ (Verlustumformung)

$\underline{x = 2}$

e) $\frac{(x+2)^2 - (x^2+4)}{4x^2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 0$ $\quad \rightarrow$ ausschließen! $x \neq 2, x \neq -2, x \neq 0$

$\frac{\cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} - \cancel{x^2} - \cancel{4}}{4x^2} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 0$ $\qquad$ Erweitern → könnte Gewinnumformung geben.

$\frac{(x+2)(x-2) + x(x-2) + x(x+2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 - 4 + x^2 - \cancel{2x} + x^2 + \cancel{2x}}{x(x+2)(x-2)} = \frac{3x^2-4}{x(x+2)(x-2)} = 0$

$3x^2 - 4 = 0 \rightarrow 3x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{4}{3} \rightarrow \underline{x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}} \rightarrow \underline{\mathbb{L} = \{-\frac{2}{\sqrt{3}}, +\frac{2}{\sqrt{3}}\}}$

keine Scheinlösungen