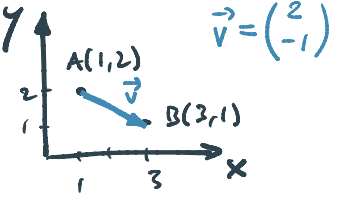
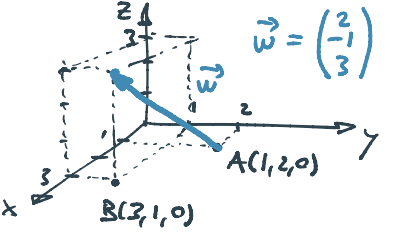
Vektoren sind eine Abbildung von einem **Anfangspunkt** zu einem **Endpunkt**. Vektoren haben deshalb eine **Richtung** und eine **Länge**. Vektoren können mit den beiden Punkten angegeben werden, d.h. ein Vektor, der von A zu B zeigt, wird auch $\overrightarrow{AB}$ geschrieben, kann aber anschliessend **beliebig verschoben** werden.

Die **Komponenten** des Vektors beschreiben die Verschiebung für jede Koordinate. Sie stehen über einander in einer runden Klammer.

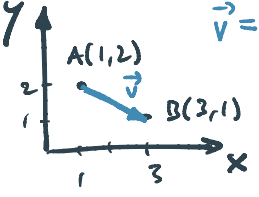
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$





Eine **Abbildung** von einem Punkt $A(A_x, A_y)$ auf einen Punkt $B(B_x, B_y)$ wird durch einen Vektor beschrieben. Die Komponenten werden durch Subtraktion der beiden Punktkoordinaten berechnet: *"Endpunkt minus Startpunkt"*

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \vec{v}$$



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} A(1,2) \\ B(3,1) \end{matrix}\right\} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ B & A \end{matrix}$$

Die **Summe zweier Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist selber wieder ein **Vektor**. Der Summenvektor wird gebildet, indem die einzelnen Komponenten addiert werden.

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Wie bei Zahlen ist auch hier die Addition **kommutativ**, d.h. die Reihenfolge spielt keine Rolle.

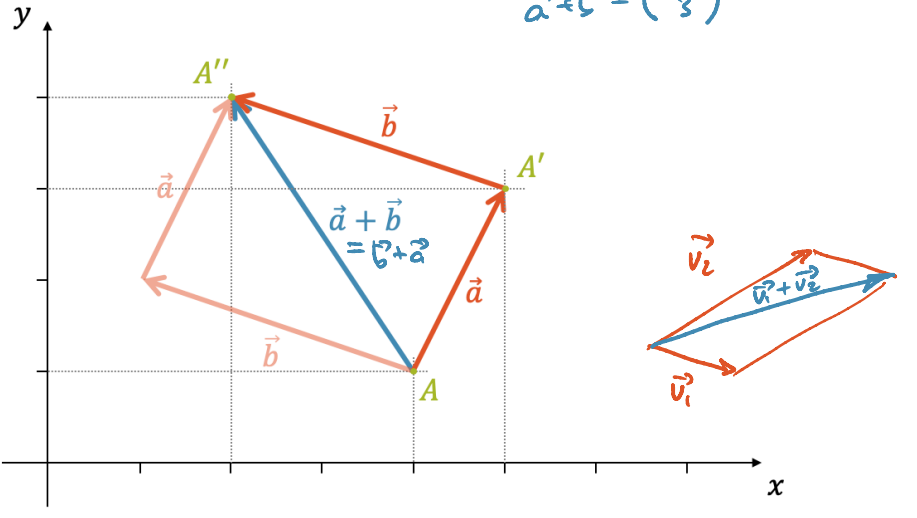
$$\vec{a} + \vec{b} \;=\; \vec{b} + \vec{a}$$

Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden ein **Parallelogramm**. Der Summenvektor $(\vec{a}+\vec{b})$ ist die **Diagonale** des Parallelogramms.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2+1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

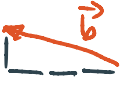


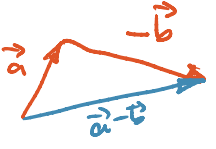
Für die **Subtraktion** von zwei Vektoren $\vec{a} - \vec{b}$ brauchen wir den Gegenvektor von $\vec{b}$, nämlich $(-\vec{b})$. Wir **addieren** $\vec{a}$ mit $(-\vec{b})$:

$$\vec{a} - \vec{b} \quad = \quad \vec{a} + (-\vec{b})$$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= \vec{a} + (-\vec{b}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



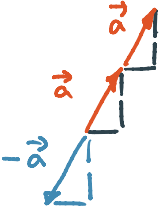


$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wird ein Vektor $\vec{v}$ **mit einer Zahl (Skalar) multipliziert**, so multipliziert sich jede Komponente des Vektors mit dieser Zahl.

$$k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} k \cdot v_x \\ k \cdot v_y \end{pmatrix}$$

Der Vektor wird k-fach verlängert. Ist der Betrag von k kleiner *eins*, so wird der Vektor entsprechend **verkürzt**. Ein **negatives** k kehrt die Richtung des Vektors um.



$$2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Zwei Vektoren heissen **kollinear**, wenn sie zu einander **parallel** sind:

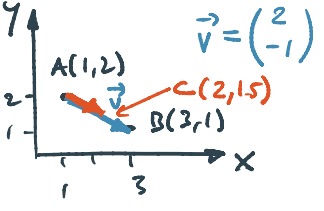
- beide haben die gleiche Richtung, oder
- sie sind exakt entgegengesetzt gerichtet

Wir können die Vektoren in eine **gemeinsame Gerade** g verschieben.

Wenn zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ **kollinear** sind, gibt es einen Faktor k, so dass

$$\vec{v} = k \cdot \vec{w}$$

Bei gleich gerichteten Vektoren ist k positiv. Entgegengesetzte kollineare Vektoren haben ein negatives k.



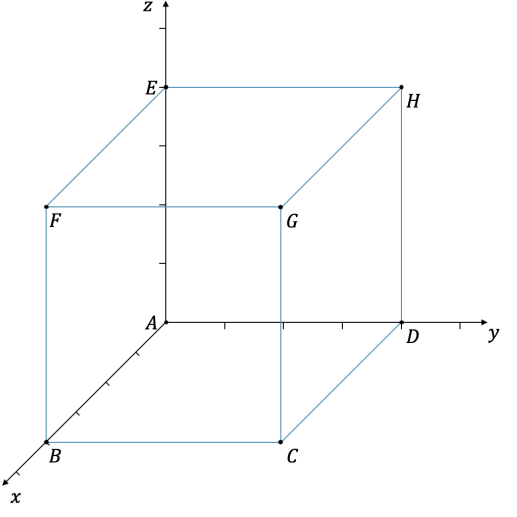
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & - & 1 \\ 1.5 & - & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

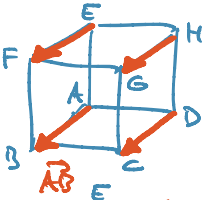
C A

Rechnen mit Vektoren (5031)

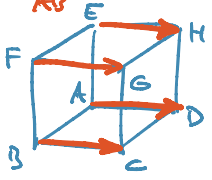
Aufgabe 1

Aufgabe 1 Stelle Vektoren auf, die von einem Punkt zu einem anderen führen. Finde dann einen zweiten identischen Vektor, der zwei andere Punkte verbindet. Finde auf diese Weise 9 Vektorpaare. Schreibe deren Namen und Komponenten auf.

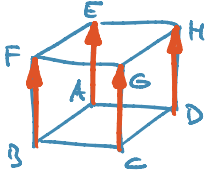




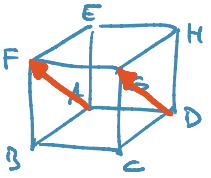
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{DC} = \vec{HG} = \vec{EF}$$



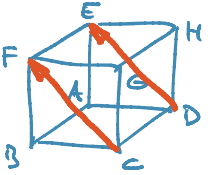
$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{BC} = \vec{FG} = \vec{EH}$$



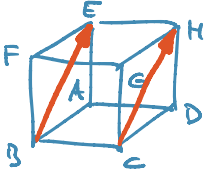
$$\vec{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{BF} = \vec{CG} = \vec{DH}$$



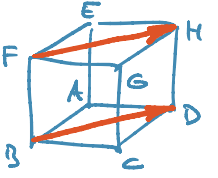
$$\vec{AF} = \vec{DG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$



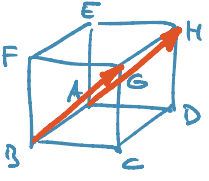
$$\vec{CF} = \vec{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$



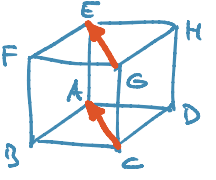
$$\vec{BE} = \vec{CH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$



$$\vec{BD} = \vec{FH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{AH} = \vec{BG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

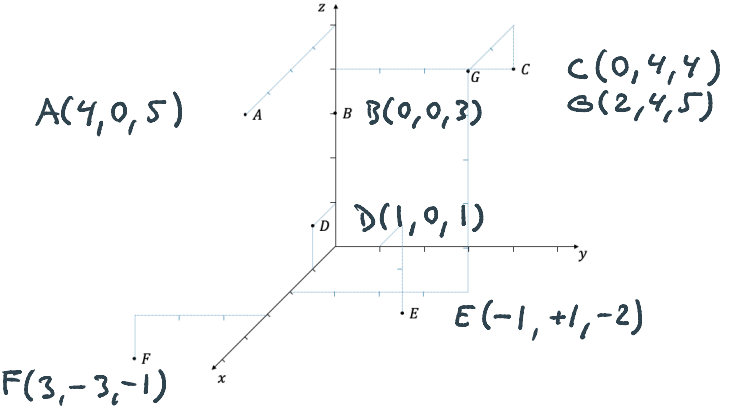


$$\vec{CA} = \vec{GE} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Vektoren (5031)

Aufgabe 2

Aufgabe 2 Gegeben sind die sieben Punkte A bis G.



a) Lese die Koordinaten der sieben Punkte aus der Skizze ab.

b) Bestimme die Komponenten der folgenden Vektoren: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FE}$ und $\overrightarrow{CG}$

c) Welche dieser Vektoren sind parallel? Welche sind gar identisch?

b)

$A(4,0,5)$
$B(0,0,3)$
$C(0,4,4)$
$D(1,0,1)$
$E(-1,+1,-2)$
$F(3,-3,-1)$
$G(2,4,5)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 0-0 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DE} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1-0 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{FE} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 1-(-3) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1+3 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{CG} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 4-4 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)

$\vec{AC} = \vec{FE}$
(identisch)

$\vec{AB} = (-2) \cdot \vec{CG}$
Vielfaches von anderem
= kollinear (parallel)

Rechnen mit Vektoren (5031)

Aufgabe 3

Aufgabe 3

a) Zeichne die folgenden Vektoren in einem Koordinatensystem.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b) Berechne die Komponenten des Vektors $\vec{v}$ und führe die Addition grafisch aus.

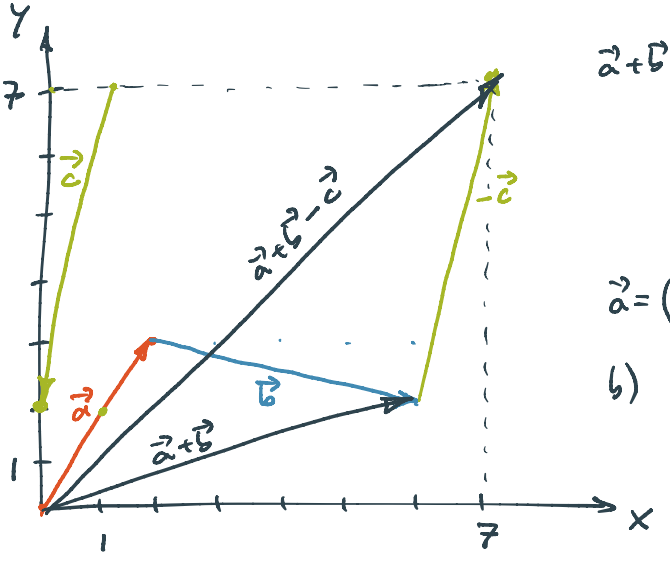
$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$$

c) Bestimme den Vektor $\vec{d}$.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = 2\vec{v}$$

d) Zeige algebraisch und ohne mit den Vektorkomponenten zu arbeiten, dass $\vec{v} = \vec{c} + \vec{d}$.

a)



$$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + (-1)\cdot\vec{c} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+4+1 \\ 3-1+5 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{v}} \end{aligned}$$

c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = 2\vec{v} \quad | -\vec{a} \; -\vec{b}$

$$\vec{d} = 2\vec{v} - \vec{a} - \vec{b}$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 - 2 - 4 \\ 14 - 3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}}$$

d) $\vec{v} = \ldots = \vec{c} + \vec{d}$

$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ (aus Aufgabe b) $\rightarrow$ $\vec{v} = 2\vec{v} - \vec{d} - \vec{c} \quad | -2\vec{v}$

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = 2\vec{v} \quad | -\vec{d}$

$\vec{a} + \vec{b} = 2\vec{v} - \vec{d}$

$-\vec{v} = -\vec{d} - \vec{c} \quad | \cdot (-1)$

$\vec{v} = \vec{d} + \vec{c}$

$\underline{\vec{v} = \vec{c} + \vec{d}}$

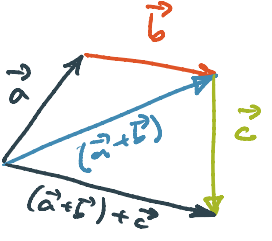
Rechnen mit Vektoren (5031)

Aufgabe 4

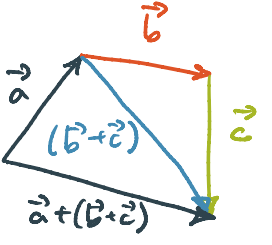
Aufgabe 4 Beweise grafisch, dass das sog. *Assoziativgesetz* auch für Vektoren gilt:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \quad = \quad \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

linke Seite:



rechte Seite:



Rechnen mit Vektoren (5031)

Aufgabe 5

Aufgabe 5 Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Berechne die neuen Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{z}$:

a) $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

b) $\vec{w} = \frac{1}{4}(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{2}{3}(\vec{c} - 2\vec{b})$

c) $2(\vec{z} - \vec{a}) + \vec{c} = \vec{c} - \vec{b}$

a) $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\cdot 3\\ \frac{1}{3}\cdot 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cdot 4\\ \frac{1}{2}\cdot(-2)\end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1+2\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \vec{v}$

b) $\vec{w} = \frac{1}{4}(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{2}{3}(\vec{c} - 2\vec{b})$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3-4\\6+2\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}5-2\cdot 4\\8+2\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/4\\2\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix}-3\\12\end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix}5\\8\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}-1/4+2\\2-8\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}7/4\\-6\end{pmatrix} = \vec{w}$

c) $$2(\vec{z}-\vec{a})+\cancel{\vec{z}} = \cancel{\vec{z}}-\vec{b} \quad \Big| -\vec{c}$$

$$2(\vec{z}-\vec{a}) = -\vec{b} \quad \Big| :2$$

$$\vec{z}-\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{b} \quad \Big| +\vec{a}$$

$$\vec{z} = \vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-2\\6+1\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix} = \vec{z}}$$