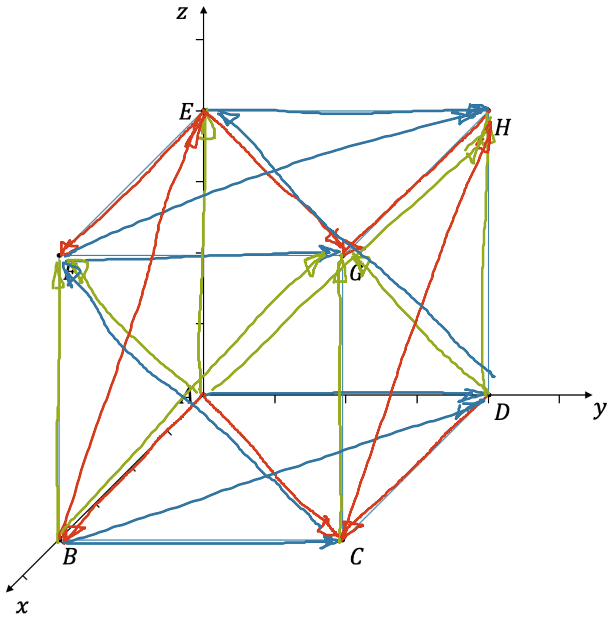
Aufgabe 1: Stellen Sie Vektoren auf, die von einem Punkt zu einem anderen führen. Finden Sie dann einen zweiten identischen Vektor, der zwei andere Punkte verbindet. Finden Sie auf diese Weise 9 Vektorenpaare. Schreiben Sie deren Namen und Komponenten auf.

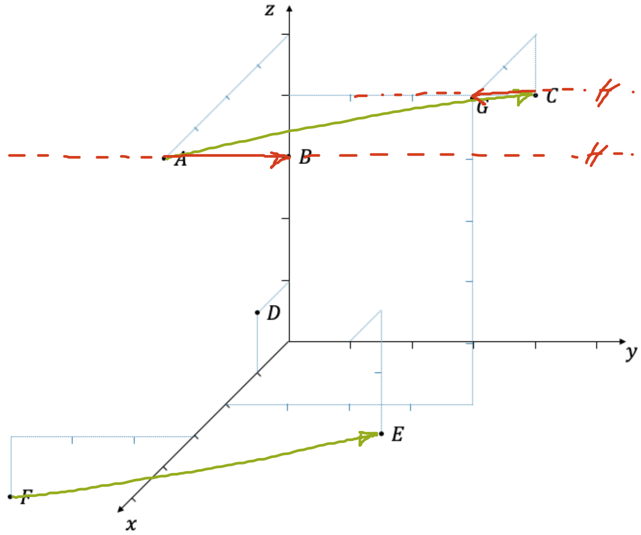


$\vec{AB} = \vec{DC} = \vec{EF} = \vec{HG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AD} = \vec{BC} = \vec{EH} = \vec{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AE} = \vec{DH} = \vec{BF} = \vec{CG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \vec{EG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{BD} = \vec{FH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{AF} = \vec{DG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{BE} = \vec{CH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{AH} = \vec{BG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{CF} = \vec{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ (Raumdiagonalen: 3 Stk, aber einzeln)

Aufgabe 2: Gegeben sind die sieben Punkte A bis G.



A(4,0,5)
B(0,0,3)
C(0,4,4)
D(1,0,1)
E(−1,1,−2)
F(3,−3,−1)
G(2,4,5)

a) Lesen Sie die Koordinaten der sieben Punkte aus der Skizze ab.

b) Bestimmen Sie die Komponenten der folgenden Vektoren: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{FE}$ und $\overrightarrow{CG}$

c) Welche dieser Vektoren sind parallel? Welche sind gar identisch?

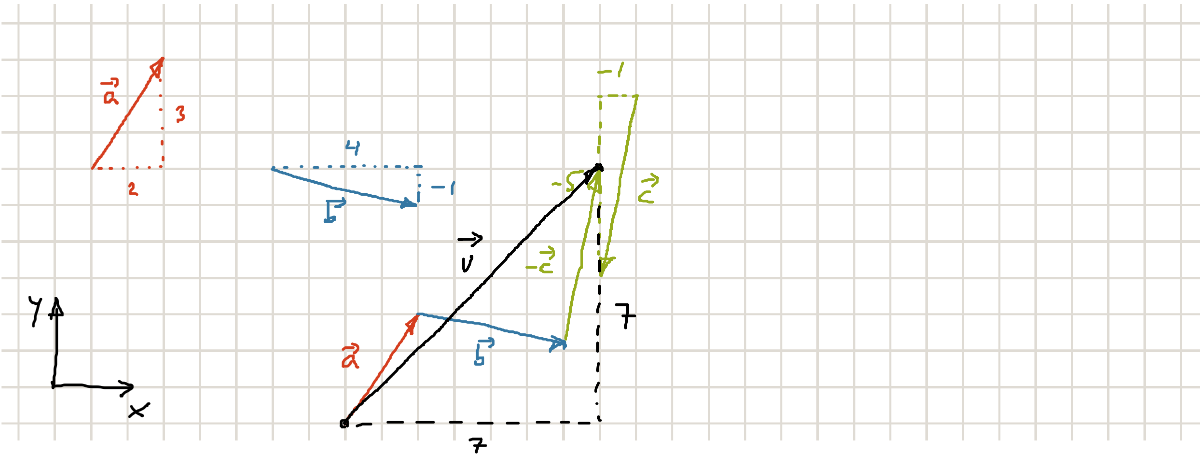
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 0-0 \\ 3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 1-0 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 1-(-3) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CG} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 4-4 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FE}$ parallel heisst Vielfaches des einen Vektors = anderer Vektor

$\overrightarrow{AB} = (-2) \cdot \overrightarrow{CG} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CG}$

Aufgabe 3:



a) Zeichnen Sie die folgenden Vektoren oben ins Gitter ein: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{v}$ und führen Sie die Addition oben grafisch aus.

$$\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4-(-1) \\ 3+(-1)-(-5) \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

c) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{d}$.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = 2\vec{v}$$

d) Zeigen Sie algebraisch und ohne mit den Vektorkomponenten zu arbeiten, dass $\vec{v} = \vec{c} + \vec{d}$.

c)

$$\vec a + \vec b + \vec d = 2\vec v = 2\cdot(\vec a + \vec b - \vec c) = 2\vec a + 2\vec b - 2\vec c$$

$$\vec a + \vec b + \vec d = 2\vec a + 2\vec b - 2\vec c \qquad \Big| -\vec a - \vec b$$

$$\vec d = \vec a + \vec b - 2\vec c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4+2 \\ 3-1+10 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}}$$

d)

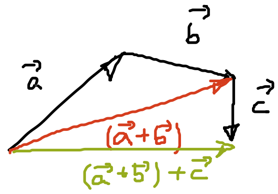
$$\underbrace{\vec v = \vec a + \vec b - \vec c}_{\vec a + \vec b = \vec v + \vec c} \qquad \underbrace{\vec d = \vec a + \vec b - 2\vec c}_{\vec a + \vec b = \vec d + 2\vec c}$$

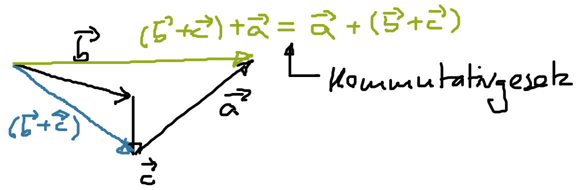
$$\vec v + \vec c = \vec d + 2\vec c \qquad \Big| -\vec c$$

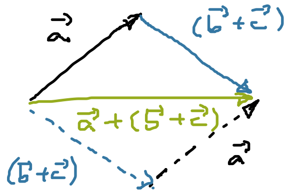
$$\vec v = \vec d + \vec c = \vec c + \vec d$$

Aufgabe 4: Beweisen Sie grafisch, dass das sog. *Assoziativgesetz* auch für Vektoren gilt:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad = \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$







Aufgabe 5: Gegeben sind die folgenden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die neuen Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{z}$:

a) $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ $= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}$

b) $\vec{w} = \frac{1}{4}(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{2}{3}(\vec{c} - 2\vec{b})$ $= \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{4}{3}\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{a} + \underbrace{\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4}\right)}_{\frac{16-3}{12} = \frac{13}{12}}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$

$$\vec{w} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{13}{12}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{13}{12}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{13}{3} - \frac{10}{3} \\ \frac{3}{2} - \frac{13}{6} - \frac{16}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{9-13-32}{6} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -6 \end{pmatrix}}$$

$$\left.\begin{aligned} (\vec{a} - \vec{b}) &= \begin{pmatrix} 3-4 \\ 6-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \\ (\vec{c} - 2\vec{b}) &= \begin{pmatrix} 5 - 2\cdot 4 \\ 8 - 2\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \vec{w} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}+2 \\ 2-8 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -6 \end{pmatrix}}$$

c) $2(\vec{z} - \vec{a}) + \vec{c} = \vec{c} - \vec{b}$

$$2\vec{z} - 2\vec{a} + \cancel{\vec{c}} = \cancel{\vec{c}} - \vec{b} \qquad | -\vec{c} + 2\vec{a}$$

$$2\vec{z} = 2\vec{a} - \vec{b} \qquad |:2$$

$$\vec{z} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 6+1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}$$