Aufgabe 1: Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int \left(5x^4 - x^3 + 2x^2 + 1\right) dx$

b) $\int \left(\sin(t) + 2\cos(t)\right) dt$

c) $\int 2^x \, dx$

d) $\int \frac{a}{b} \, da$

e) $\int x \cdot (s-1)^3 \, ds$

f) $\int \left(2x \cdot e^{x^2}\right) dx$

Aufgabe 2: Berechnen Sie den Wert der folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-4}^{5} (3x^2 - 1)\, dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (5x^2 - x) \cdot (x^3 + 1)\, dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6} \big(\tan^2(x) + 1\big)\, dx$

d) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} \frac{a}{b}\, db$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{3x^2}{2} \cos\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx \;-\; \int_{0}^{1} x \cos\left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx$

Aufgabe 3: Wenn wir den *Mittelwertsatz* auf die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + 4$ anwenden, so können wir sagen, dass im Intervall $[0, 3]$, d.h. $\Delta x = 3$, es eine Stelle c zwischen 0 und 3 gibt, für die gilt:

$$f(c) \cdot \Delta x = \int_0^3 f(x)dx$$

a) Machen Sie eine Skizze, die die Anwendung des Mittelwertsatzes auf $f(x)$ für das Intervall $[0, 3]$ aufzeigt.

b) Bestimmen Sie c.

Aufgabe 4a: Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und markieren Sie die Fläche, die von den beiden Funktionen eingeschlossen wird. Berechnen Sie dann diese Fläche.

$$f(x) = x^2 - 2x - 1, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}$$

$f(x) \overset{!}{=} 0 \quad x^2 - 2x - 1 = 0$

$a = 1,\ b = -2,\ c = -1$

$D = b^2 - 4ac = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 8$

$\sqrt{D} = \sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{2}{2} \pm \frac{2\sqrt{2}}{2} = \underline{1 \pm \sqrt{2}}$ (Nullstellen)

$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 1 = \underline{-2}$ (Scheitelpunkt)

$f(0) = \underline{-1}$ (Achsabschnitt)

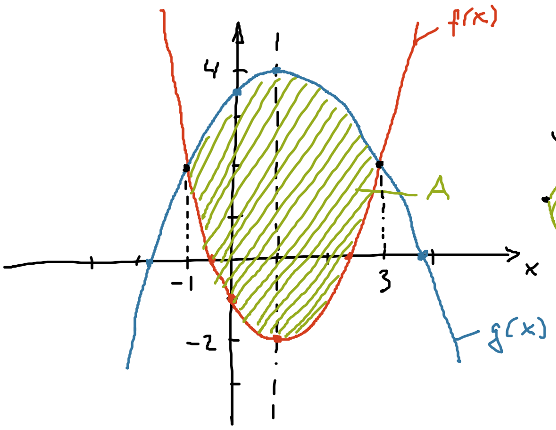
$g(x) \overset{!}{=} 0 \quad a = -\frac{1}{2},\ b = 1,\ c = \frac{7}{2}$

$D = 1 + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{7}{\cancel{2}} = 8 \rightarrow \sqrt{D} = 2\sqrt{2}$

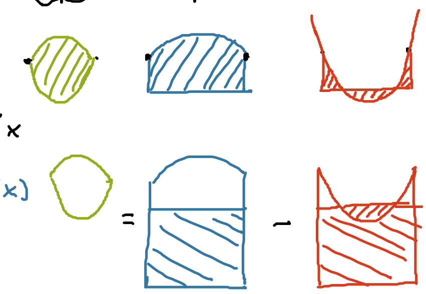
$x_{1,2} = \frac{-1}{-1} \pm \frac{2\sqrt{2}}{-1} = \underline{1 \pm 2\sqrt{2}}$ (N.S.)

$g(1) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{7}{2} = \underline{4}$ (Sch. p.)

$g(0) = \underline{\frac{7}{2}}$ (Achsab.)



$$A = \int_{-1}^{3} g(x)\,dx - \int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$$



$f(x) \overset{!}{=} g(x)$ oder $f(x) - g(x) \overset{!}{=} 0$

$(x^2 - 2x - 1) - (-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{7}{2}) \overset{!}{=} 0$

$x^2 - 2x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{7}{2} = 0$

$\frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} = 0 \quad a = \frac{3}{2},\ b = -3,\ c = -\frac{9}{2}$

$D = 9 + \cancel{4} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{9}{\cancel{2}} = 9 + 27 = 36 \rightarrow \sqrt{D} = 6$

$x_{1,2} = \frac{3}{3} \pm \frac{6}{3} = 1 \pm 2 \ \begin{cases} -1 \\ +3 \end{cases}$

$f(x) - g(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} \rightarrow g(x) - f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$

$\int_{-1}^{3} \left(-\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}\right) dx = \int_{-1}^{3} (-\frac{3}{2})(x^2 - 2x - 3)\,dx = (-\frac{3}{2}) \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\,dx$

$= (-\frac{3}{2}) \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = (-\frac{3}{2}) \cdot \left[\left(\underbrace{\frac{1}{3} \cdot 27}_{\cancel{9}} - \cancel{9} - 9\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1) - 1 + 3\right)\right]$

$= (-\frac{3}{2}) \cdot \left[-9 - \frac{5}{3}\right] = (+\frac{\cancel{3}}{2}) \cdot (+\frac{32}{\cancel{3}}) = \underline{16}$

Aufgabe 4b: Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und markieren Sie die Fläche, die von den beiden Funktionen eingeschlossen wird. Berechnen Sie dann diese Fläche.

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = \frac{7x+3}{3}$$

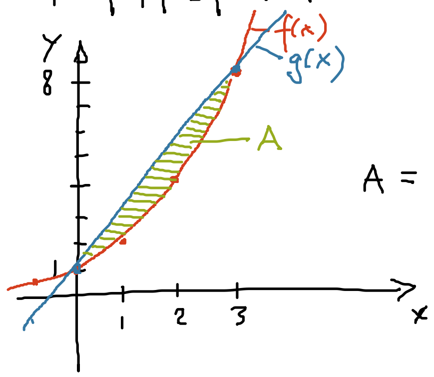
$f(x) = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

$g(x) = \frac{7}{3}x + 1 \qquad g(0) = \underline{1}$ (Achsabschnitt)

↑ Steigung der Geraden

x	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	$\frac{17}{3}$	8	$\frac{31}{3}$



$$A = \int_0^3 g(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{7}{3}x + 1 - 2^x\right) dx$$

$$\left[\frac{7}{6}x^2 + x - \frac{1}{\ln 2}2^x\right]_0^3$$

$$= \left(\frac{7}{6}\cdot 9 + 3 - \frac{2^3}{\ln 2}\right) - \left(0 + 0 + \frac{2^0}{\ln 2}\right)$$

$$= \left(\frac{63}{6}^{21}_{2} + 3 - \frac{8}{\ln 2}\right) - \frac{1}{\ln 2}$$

$$= \underbrace{\frac{21}{2} + \frac{6}{2}}_{\frac{27}{2}} - \frac{8-1}{\ln 2} = \underline{\frac{27}{2} - \frac{7}{\ln 2}} \approx 3.401$$

$$\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \ln a \cdot a^x \quad \Big| : \ln a$$

$$\frac{1}{\ln a}\,\frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln a}\,a^x\right) = a^x$$

$$\int a^x\,dx = \int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln a}\,a^x\right)dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C$$

$$\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\,2^x + C$$

Aufgabe 4c: Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und markieren Sie die Fläche, die von den beiden Funktionen eingeschlossen wird. Berechnen Sie dann diese Fläche.

$$f(x) = 2x^2 - x^4, \quad g(x) = 1$$

$f(x) = x^2(2-x^2) = -x^2(x^2-2) = -x^2 \cdot (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) \longrightarrow$ 4 Nullstellen bei $\{0, \pm\sqrt{2}\}$

$f(0) = \underline{0}$ (Achsabschnitt)

$f(x) \overset{!}{=} g(x) \longrightarrow \quad 2x^2 - x^4 = 1 \quad | + x^4 - 2x^2$

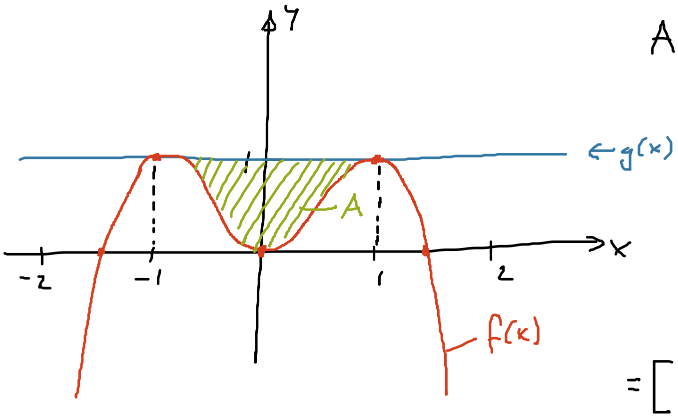
$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

Subst. $u = x^2 \quad u^2 - 2u + 1 = 0 \longrightarrow (u-1)^2 = 0 \quad u = 1$

$x^2 = 1$

$\underline{x = \pm 1}$ (Schnittpunkte $f(x) \leftrightarrow g(x)$)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	1	0	1	-8



$$A = \underbrace{\int_{-1}^{+1} g(x)\,dx}_{} - \underbrace{\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx}_{} = \int_{-1}^{+1} \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} (1 - 2x^2 + x^4)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^{+1}$$

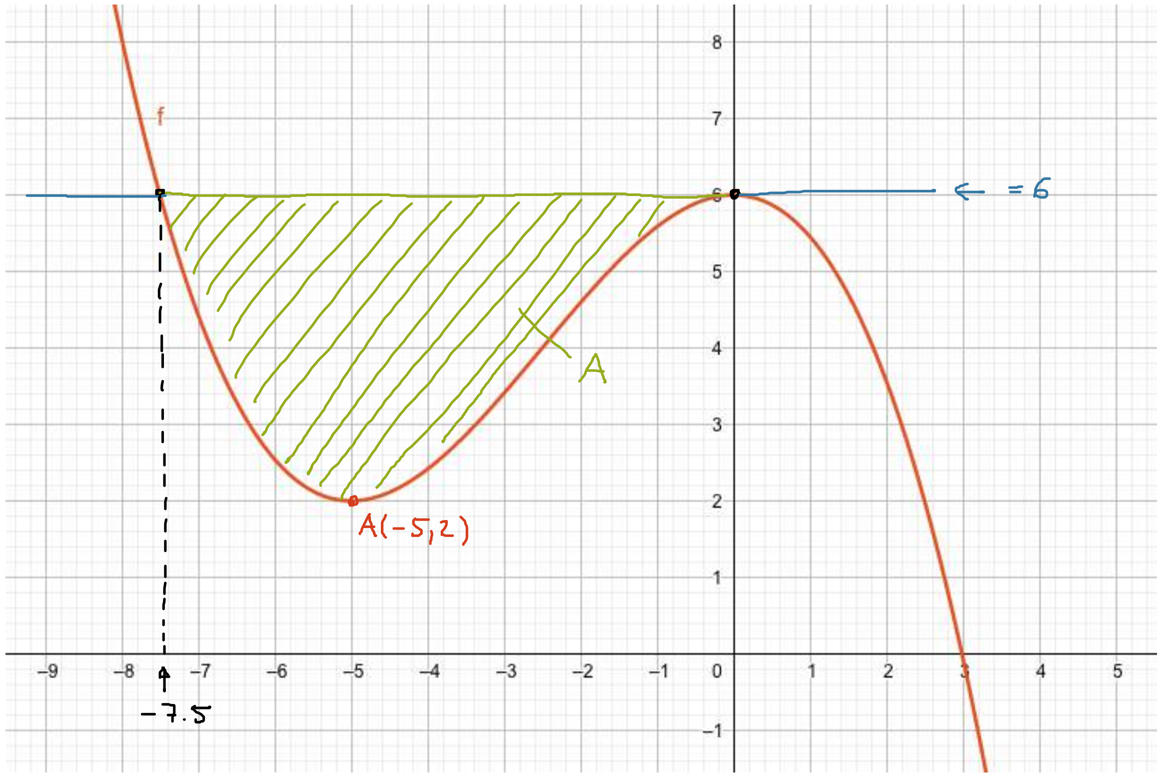
$$= \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left((-1) + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}$$

$$= 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{30 - 20 + 6}{15} = \underline{\frac{16}{15}}$$

Aufgabe 5: Der Verlauf der Funktion $f(x)$ bildet links der y-Achse eine Senke.

$$f(x) = (ax)^3 - (\sqrt{3}ax)^2 + 6$$



a) Bestimmen Sie den Parameter a, um den abgebildeten Verlauf zu kriegen. (Tipp: Übernehmen Sie das Minimum aus dem Graphen)

b) Die Senke soll von oben maximal "aufgefüllt" werden, bis sie anfängt nach rechts zu überlaufen. Wie gross ist die gefüllte Fläche?

a) $f(x) = (ax)^3 - (\sqrt{3}ax)^2 + 6 \qquad f'(x=-5) = 0 \quad$ und $\quad f(-5) = 2$

$f'(x) = 3(ax)^2 \cdot a - 2(\sqrt{3}ax) \cdot \sqrt{3}a$

$= 3a^3x^2 - 6a^2x \rightarrow f'(x=-5) = 3a^3 \cdot 25 + 6a^2 \cdot 5 = 75a^3 + 30a^2 = 0 \quad |:a^2$

$75a + 30 = 0$

$75a = -30 \quad |:75$

$a = -\frac{30}{75} = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

$\underline{a = -\frac{2}{5}}$

b) $f(x) = \left(-\frac{2}{5}x\right)^3 - \left(\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)x\right)^2 + 6$

$f(x) = -\frac{8}{125}x^3 - \frac{12}{25}x^2 + \cancel{6} \overset{!}{=} \cancel{6} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{25}\left(\frac{8}{5}x^3 + 12x^2 - 150\right)$

$f(x) \overset{!}{=} 6 \qquad -\frac{8}{125}x^{\cancel{3}} - \frac{12}{25}\cancel{x^2} = 0 \quad |:x^2 \cdot 125 \quad (x \neq 0)$

$-8x - 12 \cdot 5 = 0$

$-8x = 60$

$x = -\frac{60}{8} = -\frac{15}{2} = \underline{-7.5}$

$A = \underbrace{(7.5 \cdot 6)} - \underbrace{\int_{-7.5}^{0} f(x)\,dx} = 45 + \frac{1}{25}\left[\frac{8}{20}x^4 + 4x^3 - 150x\right]_{-15/2}^{0} = 45 - \frac{1}{25}\left(\frac{8}{20} \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^4 - 4\left(\frac{15}{2}\right)^3 + 150 \cdot \frac{15}{2}\right)$

$= \ldots = 45 - \frac{225}{8} = \frac{135}{8} = \underline{16.875}$