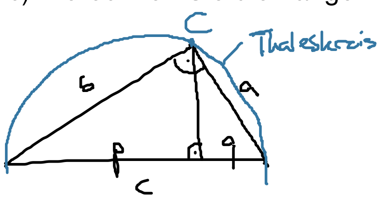
Aufgabe 1:

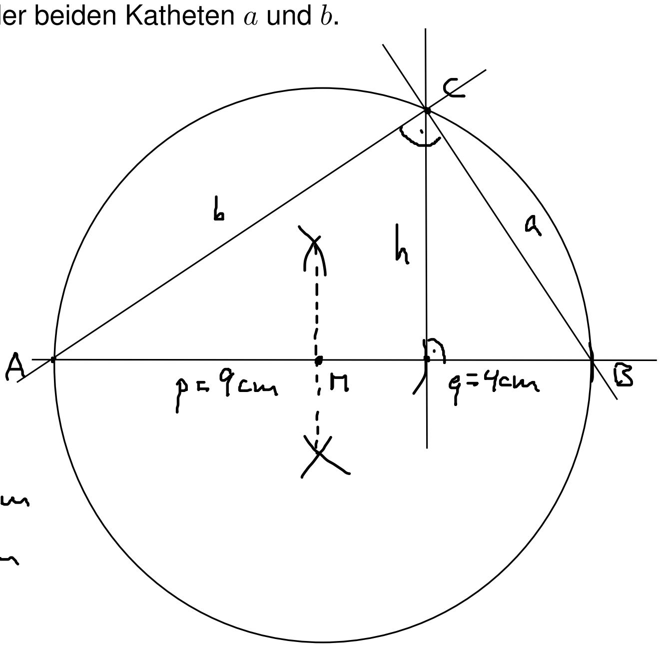
a) Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ABC, für welches die zwei, durch die Höhe aufgeteilten Teilabschnitte auf der Hypotenuse, $p = 9$ cm und $q = 4$ cm sind.

b) Wie viel beträgt die Höhe h?

c) Berechnen Sie die Längen der beiden Katheten a und b.

a)





b) Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

$\rightarrow h = \sqrt{pq} = \sqrt{9 \cdot 4}\,\text{cm}$

$= \sqrt{36}\,\text{cm}$

$\underline{h = 6\,\text{cm}}$

c) Pythagoras: $h^2 + q^2 = a^2 \rightarrow a = \sqrt{h^2+q^2} = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13}$

$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{13} = \underline{2\sqrt{13}\,\text{cm}}$

Kathetensatz: $b^2 = pc = p(p+q)$

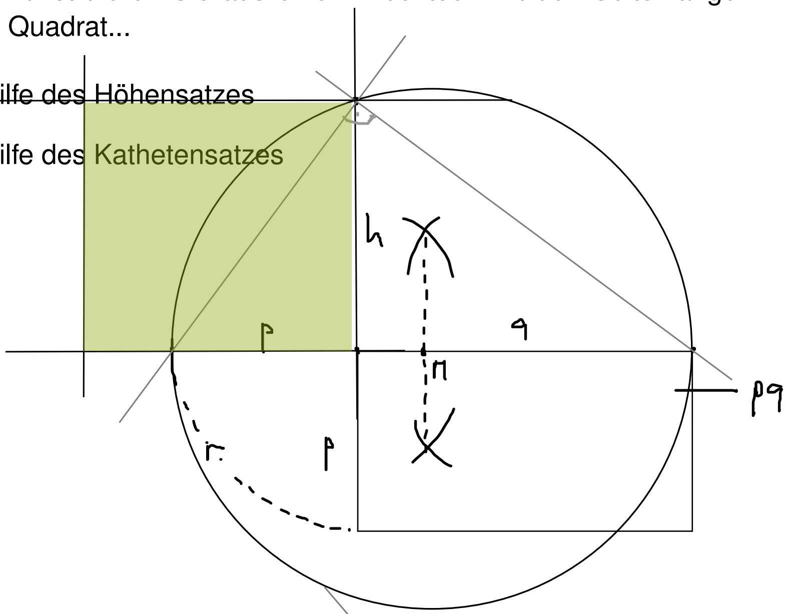
$b = \sqrt{p^2 + pq} = \sqrt{9^2 + 9 \cdot 4} = \sqrt{81+36} = \sqrt{117} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{13} = \underline{3\sqrt{13}\,\text{cm}}$

Aufgabe 2: Konstruieren Sie aus einem Rechteck mit den Seitenlängen $4\,$cm und $6\,$cm ein flächengleiches Quadrat...

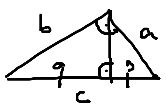
a) ...mit Hilfe des Höhensatzes

b) ...mit Hilfe des Kathetensatzes

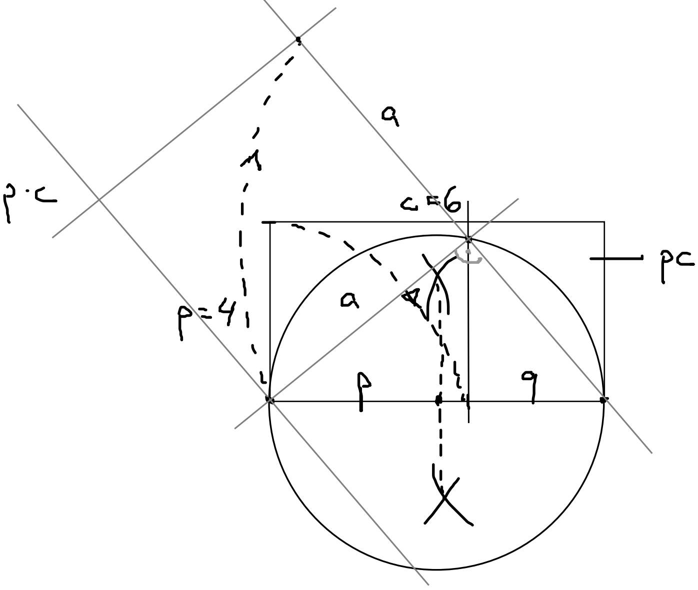
a) $h^2 = p \cdot q$



b)



$\Big\}\ a^2 = p \cdot c$



Aufgabe 3: Konstruieren Sie aus den folgenden Figuren je ein Quadrat mit gleicher Fläche, wie die ursprüngliche Figur.

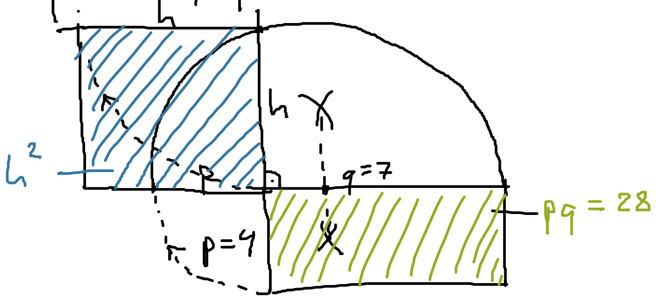
a) Ursprüngliche Figur: Rechteck mit der Fläche $28\,\text{cm}^2$.

b) Ursprüngliche Figur: Ein allgemeines Dreieck
(Tipp: Verwandeln Sie das Dreieck in ein flächengleiches Rechteck)

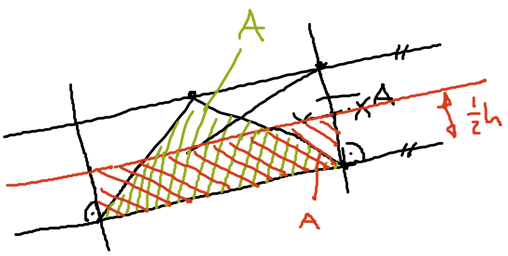
c) Ursprüngliche Figur: Ein allgemeines Viereck
(Tipp: Scheren Sie die Hälfte des Vierecks und erhalten ein flächengleiches Dreieck)

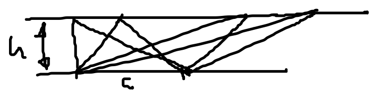
a) Rechteck : $A = \underbrace{28\text{cm}^2}_{pq}$, zB. $p = 4\text{cm}$, $q = 7\text{cm}$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$



b)



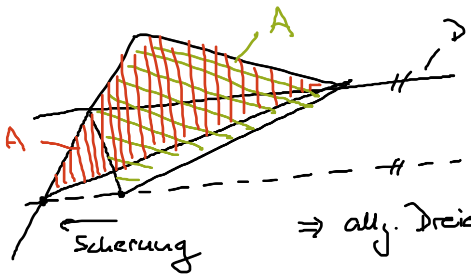


gleiche Höhe h, gleiche Grundseite c

$A = \frac{1}{2} h \cdot c$ → alle △ haben die gleiche Fläche

allg. △ → rechtwinkliges △ → Rechteck mit halber Höhe
→ Quadrat (wie in a)

c)



Diagonale → Viereck → 2 allg. Dreiecke

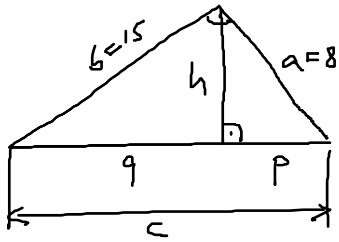
⇒ allg. Dreieck mit gleicher Fläche A → von hier an wie in b)

Aufgabe 4: Ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Katheten $a = 8\,\text{cm}$ und $b = 15\,\text{cm}$ soll vollständig berechnet werden.

a) Teilabschnitte p und q auf der Hypotenuse, die durch die Höhe aufgeteilt werden?

b) Höhe h?

c) Umfang U und Fläche A des Dreiecks?



a) Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{8^2 + 15^2}$

$= \sqrt{64 + 225}$

$c = \sqrt{289} = 17$

$\Rightarrow \quad p + q = 17$

Kathetensatz: $a^2 = p \cdot c \rightarrow p = \frac{a^2}{c} = \underline{\frac{64}{17}}$

$b^2 = q \cdot c \rightarrow q = \frac{b^2}{c} = \underline{\frac{225}{17}}$

b) Pythagoras: $h = \sqrt{b^2 - q^2} = \sqrt{225 - \left(\frac{225}{17}\right)^2} = \ldots$

$= \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{64 - \left(\frac{64}{17}\right)^2} = \ldots$

Höhensatz: $h = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{64 \cdot 225}{17^2}} = \sqrt{\left(\frac{8 \cdot 15}{17}\right)^2} = \frac{8 \cdot 15}{17} = \underline{\frac{120}{17}} \cong 7.06$

c) Umfang: $U = a + b + c = 8 + 15 + 17 = \underline{40}$

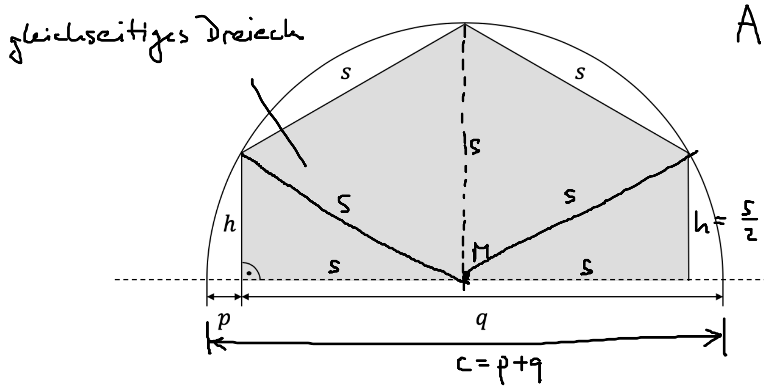
Fläche: $A = \frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \cancel{17} \cdot \frac{120}{\cancel{17}} = \underline{60}$

Aufgabe 5: In einem Halbkreis ist ein spiegelsymmetrisches Vieleck mit $s = 4\,$cm einbeschrieben. Für die Teilabschnitte p und q gilt:

$$p = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)s$$

$$q = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)s$$

Wie viel beträgt die Fläche des Vielecks?



$$A = 3 \cdot A_{\triangle} = \frac{3\sqrt{3}}{4}s^2$$

$$A_{\triangle} = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

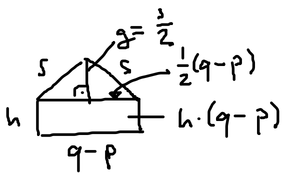
$$A = \frac{3\sqrt{3}}{\cancel{4}} \cdot 4^{\cancel{2}} = 12\sqrt{3}$$

$$\underline{A = 20.8\,\text{cm}^2}$$

$$c = p+q = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s = s - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}s + s + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}s = 2s$$

Lösung mit Höhensatz: $h^2 = p \cdot q = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s \cdot \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s = \left[1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] \cdot s^2$

$$h^2 = \left[1 - \frac{3}{4}\right]s^2 = \frac{s^2}{4} \longrightarrow h = \frac{s}{2}$$



$$A_{\square} = h \cdot (q-p) = \frac{s}{2} \cdot \left[\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s - \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s\right]$$

$$= \frac{s}{2} \cdot \left[\cancel{s} + \frac{\sqrt{3}}{2}s - \cancel{s} + \frac{\sqrt{3}}{2}s\right] = \frac{s}{2} \cdot \left[\sqrt{3}s\right] = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}s^2}$$

Pythagoras: $g = \sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{2}(q-p)\right)^2}$ $\qquad q-p = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s - \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)s = \cancel{s} + \frac{\sqrt{3}}{2}s - \cancel{s} + \frac{\sqrt{3}}{2}s = \sqrt{3}s$

$$= \sqrt{s^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{3}{4}s^2} = \sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)s^2} = \sqrt{\frac{s^2}{4}} = \frac{s}{2}$$

$$A_{\triangle} = 2A_{◺} = \cancel{2} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{s}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}s = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 \longrightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2}s^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{3}{4}\sqrt{3}s^2 = \underline{20.8\,\text{cm}^2}$$

$s=4$