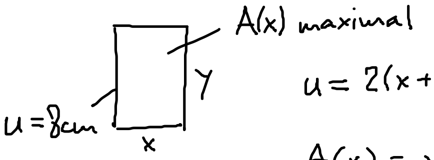
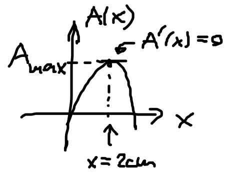
Aufgabe 1: Ein Rechteck hat die Breite x, die Höhe y und den Umfang $u = 8\,\text{cm}$. Ermitteln Sie mit Hilfe der Differentialrechnung die maximal mögliche Fläche $A(x)$ des Rechtecks.





$$u = 2(x+y) \Rightarrow y = \frac{u}{2} - x$$

Parabel

$$A(x) = x \cdot y = x \cdot \left(\frac{u}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{u}{2}x$$

nach unten zeigend → Extremum ist ein Maximum

$$A'(x) = -2x + \frac{u}{2} \overset{!}{=} 0$$

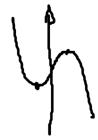
$$2x = \frac{u}{2}$$

$$x = \frac{u}{4} = \frac{8\,\text{cm}}{4} = 2\,\text{cm}$$

$$A(x = 2\,\text{cm}) = (2 \cdot 2)\,\text{cm}^2 = \underline{4\,\text{cm}^2}$$ (wenn Quadrat)

Aufgabe 2: Finden Sie für die folgenden Funktionen das Maximum und Minimum im angegebenen Intervall.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{16}$ für $[-2, 2]$



$$f'(x) = -x^2 + \frac{5}{4} = -\left(x^2 - \frac{5}{4}\right) = -\left(x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$f''(x) = -2x$$

$f''(x_1) = -2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5} < 0$ nach unten gekrümmt $\rightarrow$ Maximum in $x_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$f''(x_2) = -2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = +\sqrt{5} > 0$ nach oben gekrümmt $\rightarrow$ Minimum in $x_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ für $[-1, 2]$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2 \overset{!}{=} 0$ $\quad a = 3, \; b = -2, \; c = -2$

$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 28 \rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7}$

$\sqrt{D} = 2\sqrt{7}$

$f''(x) = 6x - 2$ $\quad \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{6}$

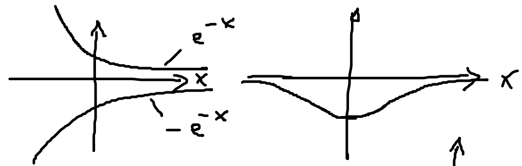
$f''(x_1) = (2 + 2\sqrt{7}) - 2 = 2\sqrt{7} > 0$ $\quad x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$ (Min) $\quad \uparrow \approx 2.6$ $\quad x_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$ (Max)

$\rightarrow$ Minimum

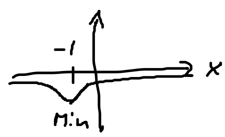
$f''(x_2) = (2 - 2\sqrt{7}) - 2 = -2\sqrt{7} < 0$

$\rightarrow$ Maximum

c) $f(x) = -e^{-(x+1)^2}$ für $]-\infty, \infty[$



$$f'(x) = -e^{-(x+1)^2} \cdot (-2(x+1) \cdot 1)$$
$$= 2(x+1)\underbrace{e^{-(x+1)^2}}_{>0} \overset{!}{=} 0$$



$\downarrow$

$x = -1$

$$f''(x) = 2 \cdot e^{-(x+1)^2} + 2(x+1) \cdot e^{-(x+1)^2} \cdot (-2(x+1))$$
$$= e^{-(x+1)^2} \cdot \left(2 - 4(x+1)^2\right) \underset{\substack{\uparrow \\ x=-1}}{=} 1 \cdot \left(2 - \cancel{4 \cdot 0}\right) = 2 > 0$$

$\Rightarrow$ Minimum

Aufgabe 3: Finden Sie die Koordinaten des Sattelpunkts $A(x, y)$ der Funktion f:

$\rightarrow f'(x) = 0,\ f''(x) = 0$

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 20x + 9$$

$$f'(x) = 4x^3 - 21x^2 + 36x - 20$$

$$f''(x) = 12x^2 - 42x + 36 \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \text{Wendepunkte}$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$a = 2,\ b = -7,\ c = 6$

$D = b^2 - 4ac = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 49 - 48 = 1$

$\sqrt{D} = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{8}{4} = 2, \quad x_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$f'(2) = 4 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 - 20 = 32 - 84 + 72 - 20 = 0 \quad \rightarrow \text{Sattelpunkt in } x = 2$$

$$f'\left(\tfrac{3}{2}\right) = 4 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^3 - 21 \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 36 \cdot \tfrac{3}{2} - 20 = 0.25 \neq 0$$

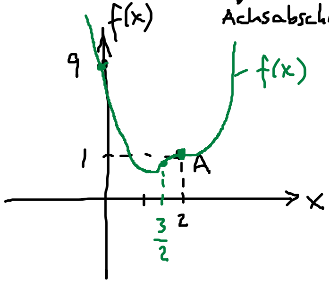
88

$$f(2) = 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 + 9 = 16 - 56 + 72 - 40 + 9 = 97 - 96 = +1$$

Achsabschnitt

−96

$\Rightarrow A(2, 1)$



Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass $\arccos(x)$ in $x = 0$ einen Wendepunkt hat.

$g(x) = \arccos(x)$ $\qquad$ $g''(x) = 0$

$f(x) = \cos(x)$ $\qquad$ $g(x) = \arccos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$ $\qquad$ $g'(x) = \; ?$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g)} = \frac{1}{-\sin(g)} \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 g}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{\cos^2(\arccos(x))}_{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$\frac{d}{dg} f$ $\qquad$ $f'(g) = -\sin(g)$

$\sin^2 g + \cos^2 g = 1$

$\Rightarrow \sin g = \sqrt{1-\cos^2 g}$

$$g''(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) = -x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ x=0}}{=} -0 \cdot 1 = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ Wendepunkt in $x = 0$

Aufgabe 5: Eine heisse Tasse Kaffee ist zu Beginn $90\,°C$. Sie kühlt sich mit einer exponentiell fallenden Temperatur ab:

$$T(t) = \Delta T_0 \cdot e^{-k \cdot t} + T_{Raum}$$

Dabei ist ΔT_0 die anfängliche Temperaturdifferenz über der Raumtemperatur $T_{Raum} = 20\,°C$. Aus Messungen haben wir den Faktor $k = 3.24 \cdot 10^{-3}\,\text{s}^{-1}$ erhalten.

a) Wie viel beträgt die Temperatur des Kaffees nach 10 Minuten?

$$T(600s) = 70°C \cdot e^{-3.24 \cdot 10^{-3} \cancel{s}^{-1} \cdot 600 \cancel{s}} + 20°C \mathrel{\hat{=}} \underline{30°C}$$

$$\Delta T_0 = 90°C - 20°C = 70°C$$

b) Wie schnell kühlt der Kaffee pro Sekunde ab, zu Beginn und nach 10 Minuten?

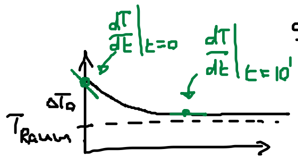
$T(t)$

Abkühlung: $$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(T(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\Delta T_0 e^{-kt} + T_{Raum}\right)$$

$$= \Delta T_0 e^{-kt} \cdot (-k) + 0$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=0} = -k \cdot \Delta T_0 e^{-kt} \underset{t=0}{=} -k \Delta T_0 \cdot 1 = -3.24 \cdot 10^{-3}\,s^{-1} \cdot 70°C$$

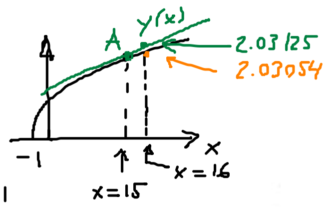
$$= \underline{-0.227\,°C/s} \quad (t=0)$$



$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=600s} = -k \Delta T_0 e^{-kt} \underset{t=600s}{=} -3.24 \cdot 10^{-3}\,s^{-1} \cdot 70°C \cdot e^{-3.24 \cdot 10^{-3} \cdot 600}$$

$$= \underline{-0.032\,°C/s}$$

Aufgabe 6: Gegeben ist folgende Funktion:



$$f(x) = \sqrt[4]{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{4}}$$

a) Bestimmen Sie die lineare Näherung der Funktion an der Stelle $x = \cancel{16}\ 15$

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 1 = \frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot 16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot 2^{-3} = \frac{1}{4 \cdot 8} = \frac{1}{32}$$

$x = 15$ $\qquad 16^{\frac{1}{4}} = 2$

Gerade: $y(x) = mx + b = \frac{x}{32} + b$

$A(15, 2)$ $\qquad m = \frac{1}{32}$ $\qquad f(15) = \sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$

$$2 = \frac{15}{32} + b \longrightarrow b = 2 - \frac{15}{32} = \frac{64-15}{32} = \frac{49}{32} \longrightarrow y(x) = \frac{x}{32} + \frac{49}{32}$$

b) Wie viel beträgt der Wert der Näherung für $x = \cancel{15}\ 16$?

$$y(x=16) = \frac{16}{32} + \frac{49}{32} = \frac{65}{32} = 2.03125$$

c) Wie gross ist die prozentuale Abweichung vom Wert der Funktion?

$$f(x=16) = \sqrt[4]{17} = 2.03054 \qquad \Delta = \underbrace{2.03125}_{(y)} - \underbrace{2.03054}_{(f)} = 7.068 \cdot 10^{-4} \approx 0.07\,\%$$