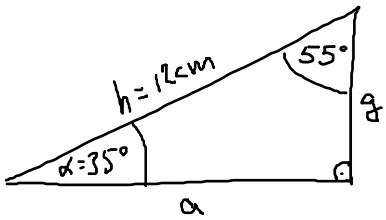
Aufgabe 1: Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen Winkel von $35°$. Die längste Seite ist 12 cm lang. Berechnen Sie alle Winkel und alle Seiten des Dreiecks.



$$\frac{a}{h} = \cos(35°) \longrightarrow a = h \cdot \cos(35°) = 12cm \cdot \cos(35°)$$

$$a = \underline{9.83cm}$$

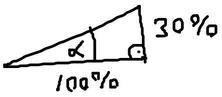
$$\frac{g}{h} = \sin(35°) \longrightarrow g = h \cdot \sin(35°) = 12cm \cdot \sin(35°)$$

$$g = \underline{6.88cm}$$

Aufgabe 2: Das Gefälle eines Stück Lands oder einer Strasse wird oft in % angegeben, womit die Steigung gemeint ist: Wie viele Prozent von einem Meter geht es bergauf bzw. bergab, wenn wir horizontal einen Meter haben. Berechnen Sie den Winkel zur Horizontalen α oder das Gefälle mit dem Taschenrechner:

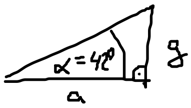
a) Wie viel beträgt α bei einem Gefälle von 30% ?

Umkehrfunktion arctan(0.3)



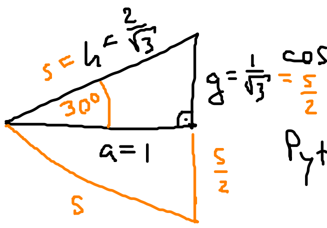
$\tan(\alpha) = \frac{30\%}{100\%} = 0.3 \rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0.3) = \underline{16.7^\circ}$

b) Wie gross ist das Gefälle bei einem Winkel von 42° ?



$\frac{g}{a} = \tan\alpha = \tan 42^\circ = 0.9004 \mathrel{\hat{=}} \underline{90.04\%}$

c) Wie gross ist das Gefälle, wenn der $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$?



$\cos(\alpha) = \frac{a}{h} \rightarrow \frac{h}{a} = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \underset{a=1}{=} \underline{\frac{2}{\sqrt{3}} = h}$

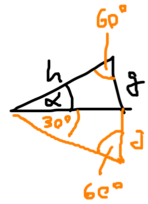
Pythagoras: $1^2 + g^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$g^2 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \rightarrow g = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Gefälle: $\frac{g}{a} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577 = \underline{57.7\%}$

Aufgabe 3: Erstellen Sie eine Wertetabelle für die trigonometrischen Funktionen $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ in der Vertikalen und den Winkeln $\alpha = 0°$, $30°$, $45°$, $60°$ und $90°$ in der Horizontalen. Skizzieren Sie für die Bestimmung des Funktionswerts ein kleines Dreieck und benutzen Sie den Pythagoras.

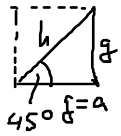
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	(∞)



$\frac{g}{h} = \sin(\alpha)$

$\to 2g = h$

$\Rightarrow \frac{g}{h} = \frac{1}{2}$



Pythagoras:

$2g^2 = h^2 \quad | :h^2$

$\frac{2g^2}{h^2} = 1 \quad | :2$

$\left(\frac{g}{h}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{g}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

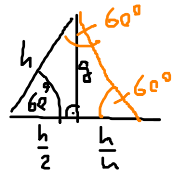
$h = \sqrt{2}\, g$

$\frac{g}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{a}{h} = \cos\alpha \qquad \frac{g}{a} = \tan\alpha$

$\alpha = 30°$: $\frac{g}{a} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{h}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{h}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\alpha = 60°$: $\frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cancel{h}}{\frac{\cancel{h}1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$



Pythagoras:

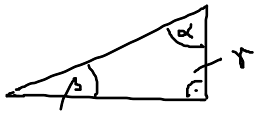
$g^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = h^2$

$g^2 = \frac{3}{4}h^2$

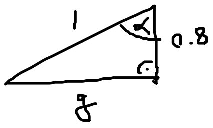
$g = \frac{\sqrt{3}}{2}h$

$\frac{g}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 4: In einem rechtwinkligen Dreieck ist der rechte Winkel γ. Berechnen Sie ohne Taschenrechner.



a) Wie viel beträgt $\sin(\alpha)$, wenn $\cos(\alpha) = 0.8$ ist?

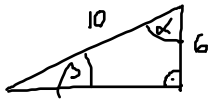


Pythagoras: $g^2 + 0.8^2 = 1^2$

$g^2 = 1 - 0.8^2 = 1 - \left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{100-64}{100} = \frac{36}{100}$

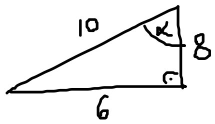
$g = \frac{6}{10} = 0.6 \Rightarrow \frac{g}{1} = \underline{\sin(\alpha) = 0.6}$

b) Wie viel beträgt $\sin(\beta)$, wenn $\cos(\alpha) = 0.6$ ist?



$\sin\beta = \frac{6}{10} = \underline{0.6}$

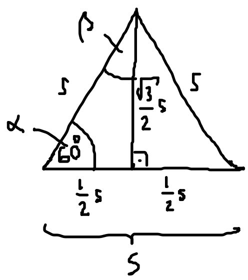
c) Wie viel beträgt $\tan(\alpha)$, wenn $\cos(\alpha) = 0.8$ ist?



Pythagoras

$\tan(\alpha) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

d) Wie viel beträgt $\cos(\beta)$, wenn $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ ist?

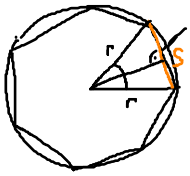


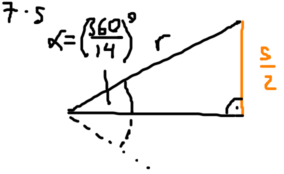
$\tan(60°) = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 60°, \ \beta = 30°$

$\cos(\beta) = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

Aufgabe 5: Berechnen Sie die folgenden Grössen.

a) Der Umfang eines regelmässigen Siebenecks mit Umkreisradius $r = 5$ cm.





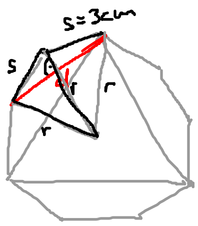
$$\sin\alpha = \frac{s/2}{r} \longrightarrow \frac{s}{2} = r\cdot\sin\alpha = 5\text{cm}\cdot\sin\alpha$$

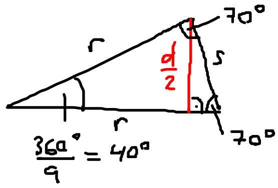
$$s = 10\text{cm}\cdot\sin\alpha$$

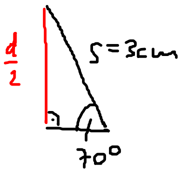
$$U = 7s = 70\text{cm}\cdot\sin\left(\frac{360}{14}\right)^\circ$$

$$= \underline{30.37\text{cm}}$$

b) Die kürzeste Diagonale eines regelmässigen Neunecks mit Seite 3 cm







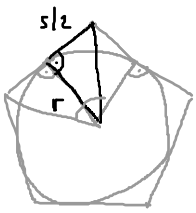
$$\frac{\frac{d}{2}}{s} = \sin 70° \longrightarrow \frac{d}{2} = s\cdot\sin 70°$$

$$d = 2s\cdot\sin 70°$$

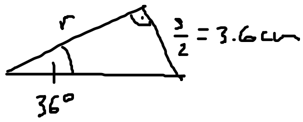
$$= 6\text{cm}\cdot\sin 70°$$

$$\underline{d = 5.64\text{cm}}$$

c) Den Inkreisradius eines regelmässigen Fünfecks mit Umfang 36 cm



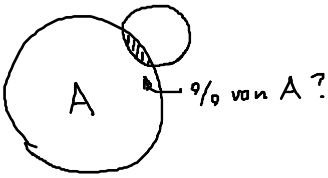
$$U = 36\text{cm} \longrightarrow s = \frac{U}{5} = 7.2\text{cm}$$

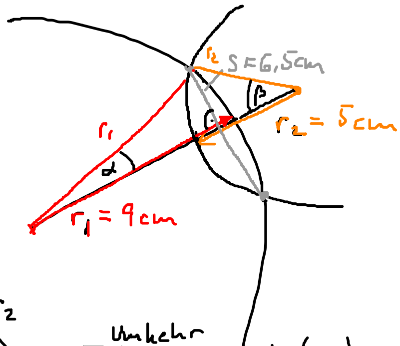


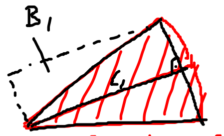
$$\frac{\frac{s}{2}}{r} = \tan 36°$$

$$r = \frac{s}{2\tan 36°} = \frac{3.6\text{cm}}{\tan 36°} = \underline{4.95\text{cm}}$$

Aufgabe 6: Ein grosser Kreis (Radius $r_1 = 9$ cm) wird von einem kleinen Kreis (Radius $r_2 = 5$ cm) so geschnitten, dass die gemeinsame Sehne $s = 6.5$ cm lang ist.
Wie viel Prozent der Kreisfläche des grossen Kreises wird durch den kleinen Kreis weggeschnitten?

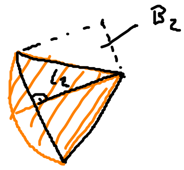






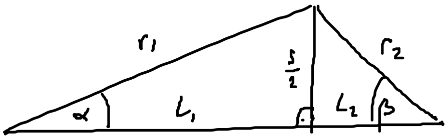
$A_1 = \left(\frac{2\alpha}{360°}\right)\pi r_1^2$

$= \underline{29.93 \text{cm}^2}$



$A_2 = \left(\frac{2\beta}{360°}\right)\pi r_2^2$

$= \underline{17.69 \text{cm}^2}$



Umkehr funktion arcsin(...)

$B_1 = L_1 \cdot \frac{s}{2}$ $\qquad$ $B_2 = L_2 \cdot \frac{s}{2}$

Pythagoras:

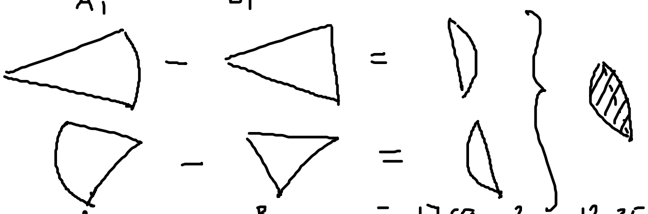
$L_1^2 = r_1^2 - (\frac{s}{2})^2$ $\qquad$ $L_2^2 = r_2^2 - (\frac{s}{2})^2$

$\hookrightarrow B_1 = \underline{27.27 \text{cm}^2}$ $\qquad$ $\hookrightarrow B_2 = \underline{12.35 \text{cm}^2}$

$\sin\alpha = \frac{\frac{s}{2}}{r_1} = \frac{6.5\cancel{\text{cm}}}{2 \cdot 9\cancel{\text{cm}}} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{6.5}{18}\right) = \underline{21.17°}$

$\sin\beta = \frac{\frac{s}{2}}{r_2} = \frac{6.5\text{cm}}{2 \cdot 5\text{cm}} \Rightarrow \beta = \sin^{-1}\left(\frac{6.5}{10}\right) = \underline{40.54°}$

$A_1 - B_1 = 29.93\text{cm}^2 - 27.27\text{cm}^2 = 2.65\text{cm}^2$



$= 7.99\text{cm}^2$

$A_2 - B_2 = 17.69\text{cm}^2 - 12.35\text{cm}^2 = 5.34\text{cm}^2$

$\% = \frac{7.99\cancel{\text{cm}^2}}{\underbrace{254\cancel{\text{cm}^2}}_{\pi r_1^2}} = \underline{\underline{3.1\%}}$