Aufgabe 1: Schreiben Sie die folgenden Summen mit einem Summenzeichen.
(Tipp: Stellen Sie zuerst die explizite Definition der Folge auf.)

a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 99$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$\uparrow \ \uparrow \ \uparrow \qquad \uparrow$

$1 \quad 2 \quad 3 \qquad 50$

$a_i = 2i - 1$

$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ ✓

$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ ✓

$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ ✓

$$\sum_{i=1}^{50} a_i = \sum_{i=1}^{50} (2i-1)$$

b) $2 + 5 + 10 + 17 + 26 + ... + 10'001$

$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \qquad 10'000$

$\uparrow \ \uparrow \ \uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$

$1 \quad 2 \quad 3 \qquad 5 \qquad 100$

$a_k = k^2 + 1$

$a_1 = 1^2 + 1 = 2$

$a_3 = 3^2 + 1 = 10$

$a_5 = 5^2 + 1 = 26$

$$\sum_{k=1}^{100} (k^2 + 1)$$

c) $256 + 128 + 64 + ... + 1$

$2^8 \quad 2^7 \quad 2^6 \qquad 2^0$

$\uparrow \ \uparrow \ \uparrow \qquad \uparrow$

$j: \ 1 \quad 2 \quad 3 \qquad 9$

$$\sum_{j=1}^{9} 2^{9-j}$$

$2^{1-1} \quad 2^{2-1} \quad 2^{3-1} \qquad 2^{7-1}$

$1 + 2 + 4 + ... + 64 + 128 + 256$

$k: 1 \quad 2 \quad 3 \qquad 7 \quad 8 \quad 9$

$$\sum_{k=1}^{9} 2^{k-1}$$

d) $1 + 0.1 + 0.01 + ... + 10^{-7}$

$10^0 \quad 10^{-1} \quad 10^{-2}$

$\uparrow \ \uparrow \ \uparrow \qquad \uparrow$ 0.0000001

$i: \ 1 \quad 2 \quad 3$

$$\sum_{i=1}^{8} 10^{1-i}$$

Aufgabe 2: Schreiben Sie die Summen aus und berechnen Sie sie.

a) $$\sum_{n=1}^{5}(2n^2 - n) = (2\cdot 1^2-1) + (2\cdot 2^2-2) + (2\cdot 3^2-3) + (2\cdot 4^2-4) + (2\cdot 5^2-5)$$
$$= 1 + 6 + 15 + 28 + 45$$
$$= \underline{\underline{95}}$$

b) $$\sum_{i=3}^{6} 3^{i-3} = (3^{3-3}) + (3^{4-3}) + (3^{5-3}) + (3^{6-3})$$
$$= 3^0 + 3 + 3^2 + 3^3$$
$$= 1 + 3 + 9 + 27$$
$$= \underline{\underline{40}}$$

c) $$\sum_{a=1}^{c} b = \underset{\overset{\uparrow}{1}}{b} + \underset{\overset{\uparrow}{2}}{b} + \underset{\overset{\uparrow}{3}}{b} + \ldots + \underset{\overset{\uparrow}{c-1}}{b} + \underset{\overset{\uparrow}{c}}{b} = c\cdot b = \underline{\underline{bc}}$$
$a:$

d) $$\sum_{j=5}^{9} j^2 = 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2$$
$$= 25 + 36 + 49 + 64 + 81$$
$$= \underline{\underline{255}}$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Summen <u>ohne</u> die Summe auszuschreiben.

a) $\sum_{n=1}^{10} 5n = 5 \cdot \sum_{n=1}^{10} n = 5 \cdot \frac{10}{2} \cdot (10+1) = 5 \cdot 55 = \underline{\underline{275}}$

b) $\sum_{m=1}^{p+1} 1 = \underline{\underline{p+1}}$

c) $\sum_{k=1}^{27} (3+2k) = \sum_{k=1}^{27} 3 + \sum_{k=1}^{27} 2k = 3 \cdot \sum_{k} + 2 \cdot \sum_{k} k = 3 \cdot 27 + \cancel{2} \cdot \frac{27}{\cancel{2}} \cdot (1+27)$

$= 81 + 27 \cdot 28$

$= \underline{\underline{809}}$

d) $2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{k=1}^{n^2} = \cancel{2} \cdot \frac{n}{\cancel{2}}(n+1) - n^2 = \cancel{n^2} + n - \cancel{n^2} = \underline{\underline{n}}$

e) $\frac{k+1}{k^2-1} \cdot \sum_{j=1}^{k} j = \frac{\cancel{k+1}}{(\cancel{k+1})(k-1)} \cdot \frac{k}{2} \cdot (k+1) = \underline{\underline{\frac{k \cdot (k+1)}{2 \cdot (k-1)}}}$

f) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j = \underline{\text{unbestimmt}}$ (0 oder -1)

Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Summen <u>ohne</u> die Summe auszuschreiben.

a) $\sum_{k=20}^{50}(2+k) = \sum_k 2 + \sum_k k = 2\cdot\sum_k + \left(\sum_{k=1}^{50} k - \sum_{k=1}^{19} k\right)$

$= 2\cdot\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{50}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{19}}\right) + \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{50} k} - \underbrace{\sum_{k=1}^{19} k}\right)$

$2\cdot(50 - 19) + \frac{50}{2}\cdot(50+1) - \frac{19}{2}\cdot(19+1)$

$= 100 - 38 + 25\cdot 51 - 9.5\cdot 20$

$= \underline{\underline{1147}}$

b) $\sum_{i=10}^{100}(10-5i) = \sum_i 10 - \sum_i 5i = 10\cdot\left(\sum_{i=1}^{100} - \sum_{i=1}^{9}\right) - 5\cdot\left(\sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^{9} i\right)$

$= 10\cdot(100-9) - 5\cdot\left(\frac{100}{2}\cdot(100+1) - \frac{9}{2}\cdot(9+1)\right)$

$= 10\cdot 91 - 5\cdot(\underbrace{50\cdot 101}_{5050} - 45) = 910 - 5\cdot 5005$

$= 910 - 25025$

$= \underline{\underline{-24'115}}$

c) $\sum_{i=x}^{200+x} 2 = 2\cdot\sum_{i=x}^{200+x} = 2\cdot\left(\sum_{i=1}^{200+x} - \sum_{i=1}^{x-1}\right) = 2\cdot(200+x-(x-1))$

$= 2\cdot(200+\cancel{x}-\cancel{x}+1)$

$= 2\cdot 201 = \underline{\underline{402}}$

d) $\sum_{k=12}^{60}(4k+j) = 4\sum_{k=12}^{60} k + j\cdot\sum_{k=12}^{60} = 4\left(\sum_{k=1}^{60} k - \sum_{k=1}^{11} k\right) + j\cdot\left(\sum_{k=1}^{60} - \sum_{k=1}^{11}\right)$

$= 4\cdot\left(\underbrace{\frac{60}{2}\cdot(60+1)} - \frac{11}{2}\cdot(11+1)\right) + j\cdot(60-11)$

$= 4\cdot(1830 - 66) + 49j$

$= 7320 - 264 + 49j$

$= \underline{\underline{7056 + 49j}}$

Aufgabe 5: Finden Sie den Wert des Platzhalters x.

a) $\sum_{i=1}^{100} i^2 = \sum_{j=0}^{99} x$

$\uparrow$ $(j+1) = i$

$$\sum_{(j+1)=1}^{100} (j+1)^2 = \sum_{j=0}^{99} \underbrace{(j+1)^2}_{x} \rightarrow \underline{\underline{x = (j+1)^2}}$$

$(j+1) = 1..100$

$j = 0..99$

b) $\sum_{k=1}^{100} (2k-2) = 2 \sum_{j=0}^{99} x$

$\uparrow$ $(j+1) = k$

$$\sum_{(j+1)=1}^{100} (2(j+1)-2) = 2\sum_{j=0}^{99}((j+1)-1) = 2\sum_{j=0}^{99} j$$

$j \downarrow x$

$\Rightarrow \underline{\underline{x = j}}$

c) $\sum_{i=5}^{30} (i-4)^3 = \sum_{j=1}^{x} j^3$

$j = i - 4$

$i = (j+4)$

$$\sum_{(j+4)=5}^{30} ((j+4)-4)^3 = \sum_{j=1}^{26} j^3 \rightarrow \underline{\underline{x = 26}}$$

d) $\sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{(k+4)^2} = \sum_{i=x}^{\infty} \frac{1}{(i-5)^2}$

$$\sum_{(i-9)=7}^{\infty} \frac{1}{((i-9)+4)^2} = \sum_{i=16}^{\infty} \frac{1}{(i-5)^2} \rightarrow \underline{\underline{x = 16}}$$

$(k+4)^2 = (i-5)^2$

$k+4 = i-5 \quad | -4$

$k = (i-9)$