Aufgabe 1: Bestimmen Sie die ersten fünf Glieder der folgenden arithmetischen Folgen.

a) $48, 36, 24, 12, 0$

$\underbrace{+(-12)}_{d}$

b) $a_1 = 5, \quad a_3 = 12$

$(a_n) = 5, 8{,}5, 12, 15{,}5, 19, \ldots$

$+d \quad +d \Rightarrow 2d = 7 \rightarrow d = 3{,}5$

c) $b_3 = \frac{2}{5}, \quad b_6 = 1$

$b_6 - b_3 = 3d \Rightarrow (b_n) = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$

$\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 3d \rightarrow d = \frac{1}{5}$

d) $a_1 = 16, \quad d = -\frac{4}{3}$

$(a_n) = 16, 14\frac{2}{3}, 13\frac{1}{3}, 12, 10\frac{2}{3}, \ldots$

e) $c_{10} = 100, \quad c_{20} = 210$

$c_{20} - c_{10} = 10d$

$210 - 100 = 110 = 10d \Rightarrow \underline{d = 11}$

$c_1 = c_{10} - 9d = 100 - 9 \cdot 11 = 1$

$(c_j) = 1, 12, 23, 34, 45, \ldots$

f) $a_{89} = 267, \quad a_{198} = 594$

$a_{198} - a_{89} = 594 - 267 = 327$

$109d = 327$

$d = \frac{327}{109} = \frac{3 \cdot \cancel{109}}{\cancel{109}} = \underline{3}$

$a_1 = a_{89} - 88d = 267 - 88 \cdot 3 = 267 - 264 = 3$

$(a_i) = 3, 6, 9, 12, 15, \ldots$

$$\begin{array}{r} 594 \\ -267 \\ \hline 327 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 198 \\ -89 \\ \hline 109 \end{array}$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie die explizite und rekursive Definition der folgenden arithmetischen Folgen.

a) $a_7 = 13, \;\; a_{10} = \frac{35}{2}$

$3d = \frac{35}{2} - \frac{26}{2} = \frac{35-26}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \rightarrow \underline{d = 1{,}5}$

$a_1 = a_7 - 6d = 13 - 6 \cdot 1{,}5 = \underline{4}$

expl. Def: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 4 + (n-1) \cdot 1{,}5 \rightarrow \underline{a_n = 4 + (n-1) \cdot 1{,}5}$

rek. Def: $a_n = a_{n-1} + d \rightarrow \underline{a_n = a_{n-1} + 1{,}5 \text{ und } a_1 = 4}$

b) $e_{99} = 99, \;\; e_{109} = 98$

$10d = 98 - 99 = -1 \rightarrow \underline{d = -0{,}1}$

$e_1 = e_{99} - 98d = 99 + \underbrace{98 \cdot 0.1}_{9.8} = \underline{108.8}$

expl. Def: $\underline{e_j = 108.8 - (j-1) \cdot 0.1}$

rek. Def: $\underline{e_j = e_{j-1} - 0.1 \text{ und } e_1 = 108.8}$

c) $b_4 = \frac{7c}{3}, \;\; b_6 = 3c$

$2d = 3c - \frac{7}{3}c = \frac{9-7}{3}c = \frac{2}{3}c \rightarrow \underline{d = \frac{c}{3}}$

$b_1 = b_4 - 3d = \frac{7c}{3} - \cancel{3} \cdot \frac{c}{\cancel{3}} = \frac{4}{3}c$

expl. Def: $\underline{b_k = \frac{4}{3}c + (k-1) \cdot \frac{c}{3}}$

rek. Def: $\underline{b_k = b_{k-1} + \frac{c}{3} \text{ und } b_1 = \frac{4}{3}c}$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die ersten fünf Glieder der folgenden geometrischen Folgen.

a) $2, 12, 72, 432, 2592, \ldots$

$\cdot q \rightarrow q = 6$

b) $48, 36, \ldots$

$\cdot q$

$q = \frac{36}{48} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$(a_n) = 48, 36, 27, \frac{81}{4}, \frac{243}{16}, \ldots$

c) $a_1 = 64, \quad a_3 = 16$

$(a_n) = 64, 32, 16, 8, 4, \ldots$

$\cdot q \quad \cdot q$

$16 = 64 \cdot q^2 \quad | : 64$

$q^2 = \frac{16}{64} = \frac{1}{4} \rightarrow \underline{q = \frac{1}{2}}$

d) $b_3 = 36, \quad b_6 = 972$

$q^3 = \frac{972}{36} = \frac{324}{12} = \frac{81}{3} = \underbrace{27}_{= 3^3} \rightarrow \underline{q = 3}$

$b_1 = b_3 : q^2 \leftarrow b_1 \cdot q^2 = b_3$

$= 36 : 9 = \underline{4} \qquad (b_j) = 4, 12, 36, 108, 324, \ldots$

e) $a_1 = 16, \quad q = -\frac{4}{3}$

$(a_n) = 16, -\frac{64}{3}, \frac{256}{9}, -\frac{1024}{27}, \frac{4096}{81}, \ldots$

f) $c_{10} = 1'024, \quad c_{16} = 65'536$

$\cdot q^6 = \frac{65'536}{1024} = \frac{2^{16}}{2^{10}} = 2^{16-10} = 2^6 \rightarrow \underline{q = 2}$

$c_1 = \frac{c_{10}}{q^9} = \frac{2^{10}}{2^9} = 2 \longrightarrow (c_n) = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

g) $a_5 = 5, \quad a_{11} = 32$

$q^6 = \frac{32}{5} = \frac{64}{2 \cdot 5} = \frac{2^6}{10} = \frac{1}{10} \cdot 2^6 \longrightarrow q = \frac{1}{\sqrt[6]{10}} \cdot 2 = \frac{2}{\sqrt[6]{10}} = \underline{2 \cdot 10^{-1/6}}$

$a_1 = \frac{a_5}{q^4} = \frac{5}{\left(\frac{2}{10^{1/6}}\right)^4} = \frac{5}{\frac{16}{10^{2/3}}} = \frac{5 \cdot 10^{2/3}}{16}$

$(a_n) = \frac{5}{16} \cdot 10^{2/3}, \frac{5}{8} 10^{1/2}, \frac{5}{4} 10^{1/3}, \frac{5}{2} 10^{1/6}, 5, \ldots$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die explizite und rekursive Definition der folgenden geometrischen Folgen.

a) $a_4 = 6, \ \ a_{10} = 24$

$q^6 = \frac{24}{6} = 4 \rightarrow q = \sqrt[6]{4} = 4^{\frac{1}{6}} = (2^2)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{2}{6}} = 2^{\frac{1}{3}} \rightarrow \underline{q = 2^{\frac{1}{3}}}$

$a_1 = \frac{a_4}{q^3} = \frac{6}{2} = \underline{3}$

expl. Def: $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)} \rightarrow \underline{a_n = 3 \cdot (\sqrt[3]{2})^{(n-1)}}$

rek. Def: $a_n = a_{n-1} \cdot q \rightarrow \underline{a_n = a_{n-1} \cdot \sqrt[3]{2}, \ a_1 = 3}$

b) $b_3 = 12, \ \ b_6 = 1.5$

$q^3 = \frac{1.5}{12} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} \rightarrow \underline{q = \frac{1}{2}}$ $\qquad b_1 = \frac{b_3}{q^2} = \frac{12}{\frac{1}{4}} = \underline{48}$

expl. Def: $\underline{b_i = 48 \cdot (\frac{1}{2})^{(i-1)}}$

rek. Def: $\underline{b_i = b_{i-1} \cdot \frac{1}{2}, \ b_1 = 48}$

c) $h_6 = f^2, \ \ h_{10} = 1$

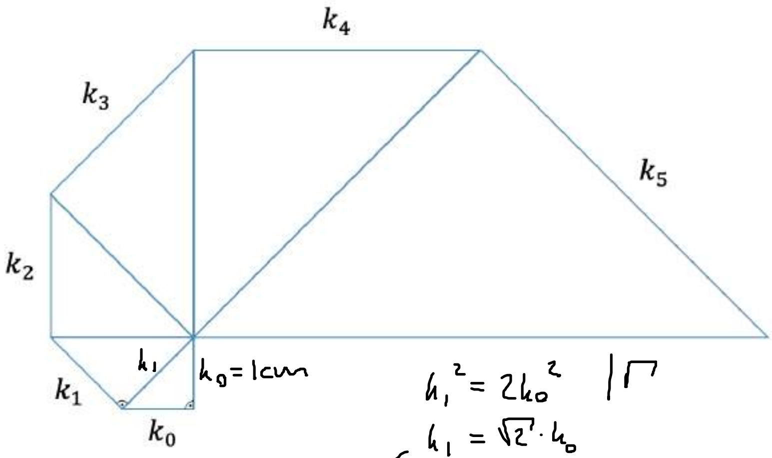
$q^4 = \frac{1}{f^2}$ $\qquad h_6 \cdot q^4 = h_{10} \rightarrow q^4 = \frac{h_{10}}{h_6}$

$\hookrightarrow \underline{q = f^{-1/2}}$ $\qquad h_1 = \frac{h_6}{q^5} = \frac{f^2}{f^{-5/2}} = f^{2+\frac{5}{2}} = \underline{f^{\frac{9}{2}}}$

expl. Def: $\underline{h_k = f^{9/2} \cdot (f^{-1/2})^{(k-1)}}$

rek. Def: $\underline{h_k = h_{k-1} \cdot f^{-1/2}, \ h_1 = f^{\frac{9}{2}}}$

Aufgabe 5: Die Länge der Katheten beschreiben eine Zahlenfolge. Gegeben ist $k_0 = 1cm$.



$k_1^2 = 2k_0^2 \quad | \sqrt{\ }$

$k_1 = \sqrt{2} \cdot k_0$

$k_2 = \sqrt{2} \cdot k_1$

a) Stellen Sie die explizite und relative Definition der Folge auf.

expl. Def: $k_i = k_1 \cdot q^{(i-1)} = k_0 \cdot q^i = 1 \cdot \sqrt{2}^i = \underline{\sqrt{2}^i}$

reh. Def: $k_i = k_{i-1} \cdot q = \underline{k_{i-1} \cdot \sqrt{2},\ k_0 = 1}$

b) Um welche Art von Folge handelt es sich?

geom. Folge mit $q = \sqrt{2}$

c) Ist die Zahlenfolge konvergent, divergent oder unbestimmt divergent?

wächst immer mehr an, "explodiert" für $i \to \infty$

d) Berechnen Sie k_5 mit Hilfe der expliziten Definition und überprüfen Sie Ihr Resultat in der Zeichnung.

$k_i = \sqrt{2}^i \Rightarrow k_5 = \sqrt{2}^5 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}^4 = \underline{\sqrt{2} \cdot 4}$ $(\approx 5.66\,cm)$

e) Wie viel würde k_{100} betragen und wie viele Umdrehungen würden Sie in der Zeichnung machen, von k_0 bis k_{100}?

8 Schritte = 1 Umdrehung $(45° \cdot 8 = 360°)$

$\Rightarrow \frac{100}{8} = \underline{12.5 \text{ Umdrehungen}}$

$k_{100} = (2^{1/2})^{100} = 2^{50} \approx 1,13 \cdot 10^{15}\,cm = 1,13 \cdot 10^{13}\,m = 1.13 \cdot 10^{10}\,km$