Aufgabe 1: Bestimmen sie die ersten sieben Glieder zu den folgenden rekursiven Definitionen.

a) $a_n = a_{n-1} + 2, \quad a_1 = 5$

$(a_n) = 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \ldots$

b) $b_k = b_{k-1} \cdot 2, \quad b_4 = 24$

$(b_k) = 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$

c) $c_{j+1} = (-1) \cdot c_j + 5, \quad c_0 = -2$

$(c_j) = -2, 7, -2, 7, -2, 7, -2, \ldots$

d) $a_{n+2} = a_n - a_{n+1} + 10, \quad a_2 = 15, \quad a_3 = 5$

n	1	2	3	4	5	6	7	…
a_n	10	15	5	20	−5	35	−30	…

$a_1 \underbrace{-15+10}_{} = 5$

$a_1 - 5 = 5 \longrightarrow a_1 = 10$

e) $b_k = b_{k-1} + \dfrac{2}{k+1}, \quad b_1 = 0$ (nur die ersten vier Glieder)

$b_1 = 0$

$b_2 = b_1 + \frac{2}{2+1} = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$b_3 = b_2 + \frac{2}{3+1} = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} = \frac{8+6}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$

$b_4 = b_3 + \frac{2}{4+1} = \frac{7}{6} + \frac{2}{5} = \frac{35+12}{30} = \frac{47}{30}$

$\hookrightarrow (b_k) = 0, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{47}{30}, \ldots$

Aufgabe 2: Schreiben Sie die rekursive Definition auf. Finden Sie dann die Glieder der Schwester-Folge, die die gleiche rekursive Definition hat, jedoch mit einem anderen Glied festgelegt ist.

a) $(a_k) = 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...$ zusätzlich gesucht b_k mit $b_1 = 3$

$a_k = a_{k-1} \cdot 2$, $a_1 = 1$ $\quad b_k = b_{k-1} \cdot 2$, $b_1 = 3$

$\hookrightarrow (b_k) = 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...$

b) $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$ zusätzlich gesucht b_n mit $b_1 = 3$ und $b_2 = 3$

$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ (Fibonacci)

$(b_n) = 3, 3, 6, 9, 15, 24, 39, ...$

c) $(b_j) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...$ zusätzlich gesucht c_j mit $c_1 = \frac{1}{2}$

$b_j = b_{j-1} + 1$, $b_1 = 1$ $\rightarrow$ $c_j = c_{j-1} + 1$, $c_1 = \frac{1}{2}$

$\hookrightarrow (c_j) = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, ...$

d) $(d_k) = 233,\ 23.3,\ 2.33,\ 0.233, ...$ zusätzlich gesucht e_k mit $e_1 = 1$

$d_k = \frac{d_{k-1}}{10}$, $d_1 = 233$ $\rightarrow$ $e_k = \frac{e_{k-1}}{10}$, $e_1 = 1$

$\hookrightarrow (e_k) = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ...$

e) $(a_n) = 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, ...$ zusätzlich gesucht b_n mit $b_3 = 16$

$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{2}$, $a_1 = 6$ $\rightarrow$ $b_n = b_{n-1} \cdot \frac{1}{2}$, $b_3 = 16$

$\hookrightarrow (b_n) = 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ...$

Aufgabe 3: Stellen Sie die rekursive Definition für die folgenden Folgen auf.

a) $2, 4, 6, 8, 10, 12, ...$

$a_k = a_{k-1} + 2 \quad , \quad a_1 = 2$

b) $2, 6, 18, 54, ...$

$a_j = a_{j-1} \cdot 3 \quad , \quad a_1 = 2$

c) $3, 6, 30, 870, ...$

$a_n = (a_{n-1} - 1) \cdot a_{n-1} = a_{n-1}^2 - a_{n-1} \quad , \quad a_1 = 3$

d) $a, \ (a^2 + a), (a^3 + a^2 + a), (a^4 + a^3 + a^2 + a), ...$

$b_j = (b_{j-1} \cdot a) + a \quad , \quad b_1 = a$

e) $3, 4, 7, 11, 18, 29, ...$ Fibonacci

$a_j = a_{j-2} + a_{j-1} \quad , \quad a_1 = 3 \ , \ a_2 = 4$

+1 +4 +9 +16 +25

f) $5, 6, 10, 19, 35, ...$

2 3

$a_n = a_{n-1} + (n-1)^2 \ , \ a_1 = 5$